



# *Научно-технический вестник*

БРЯНСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

*Nauchno-Tekhnicheskiiy Vestnik  
Bryanskogo Gosudarstvennogo  
Universiteta*

Б Р Я Н С К

2026(2)

ISSN 2413-9920

**Научно-технический  
ВЕСТНИК  
Брянского  
государственного  
университета**

**№ 2  
2026**

**Nauchno-tekhnicheskij**  
**VESTNIK**  
**Bryanskogo**  
**gosudarstvennogo**  
**universiteta**

**Scientific and Technical Journal of**  
**Bryansk State University**

**№ 2**  
**2026**

ББК 74.580.4

Н-34

Научно-технический вестник Брянского государственного университета. № 2 (2026). Брянск: РИСО БГУ, 2023. – Точка доступа: <http://ntv-brgu.ru>  
Размещено на официальном сайте журнала: 25.06.2026

Решением Высшей Аттестационной комиссии при Минобрнауки России с 07 марта 2023 г. сетевое издание «Научно-технический вестник Брянского государственного университета» включено в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по следующим специальностям научных работников:

2.5.2 – Машиноведение (технические науки);

2.5.11 – Наземные транспортно-технологические средства и комплексы (технические науки);

2.5.21 – Машины, агрегаты и технологические процессы (технические науки)

Решением Высшей Аттестационной комиссии при Минобрнауки России (письмо от 06 декабря 2022 г. № 02-1198) сетевое издание «Научно-технический вестник Брянского государственного университета» отнесено к категории К2

Решением Межведомственной рабочей группы РАН (протокол заседания от 17.07.2025 № ДС/110) сетевое издание «Научно-технический вестник Брянского государственного университета» включено в Единый государственный перечень научных изданий - «Белый список» (уровень 3)

#### **Главный редактор сетевого издания:**

*О.В. Бабич* – доктор экономических наук, заместитель проректора по научной работе, международному сотрудничеству, инновационному развитию и цифровизации – начальник управления научной политики Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского (г. Брянск, Россия).

#### **Заместитель главного редактора сетевого издания:**

*А.В. Лагереv* – доктор технических наук, профессор кафедры наземных транспортно-технологических средств Российского университета транспорта (г. Москва, Россия)

#### **Ответственный секретарь сетевого издания:**

*И.В. Мельников* – кандидат биологических наук, начальник Редакционно-издательского отдела Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского (г. Брянск, Россия).

#### **Редакционная коллегия сетевого издания:**

*Д.В. Артамонов* – доктор технических наук, ректор Пензенского государственного университета (г. Пенза, Россия);

*О.В. Бабич* – доктор экономических наук, заместитель проректора по научной работе, международному сотрудничеству, инновационному развитию и цифровизации – начальник управления научной политики Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского (г. Брянск, Россия).

*Н.И. Баурова* – доктор технических наук, декан факультета дорожных и технологических машин Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (г. Москва, Россия);

*В.В. Беляков* – доктор технических наук, начальник управления научно-исследовательских и инновационных работ Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева (г. Нижний Новгород, Россия);

*А.В. Вершинский* – доктор технических наук, профессор кафедры подъемно-транспортных систем Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (г. Москва, Россия);

*К.А. Гончаров* – доктор технических наук, профессор кафедры наземных транспортно-технологических средств Российского университета транспорта (г. Москва, Россия);

*А.А. Короткий* – доктор технических наук, заведующий кафедрой транспортных систем и логистики Донского государственного технического университета (г. Ростов-на-Дону, Россия);

*А.В. Лагереv* – доктор технических наук, профессор кафедры наземных транспортно-технологических средств Российского университета транспорта (г. Москва, Россия);

*И.А. Лагереv* – доктор технических наук, ректор Кубанского государственного технологического университета (г. Краснодар, Россия);

*В.М. Пашкевич* – доктор технических наук, проректор по научной работе Белорусско-Российского университета (г. Могилев, Беларусь);

*А.В. Рыбаков* – доктор технических наук, начальник лаборатории информационного обеспечения населения и технологий информационной поддержки Академии гражданской защиты МЧС России (г. Химки, Россия);

**Chief editor:**

*O.V. Babich* – Doctor of Economical Sciences, Deputy Vice-Rector for research, international cooperation, innovative development, and digitalization – Head of the Department of scientific policy at Academician I.G. Petrovskii Bryansk State University (Bryansk, Russia).

**Vice-Chief editor:**

*A.V. Lagerev* - Doctor of Technical Sciences, Professor at the Department of ground transport and technology at the Russian University of Transport (Moscow, Russia).

**Executive secretary:**

*I.V. Melnikov* – Candidate of Biological Sciences, Chief of Editorial-publishing Department at Academician I.G. Petrovskii Bryansk State University (Bryansk, Russia).

**Editorial Board:**

*D.V. Artamonov* – Doctor of Technical Sciences, Rector at Penza State University (Penza, Russia);

*N.I. Baurova* – Doctor of Technical Sciences, Dean of Faculty of road and technological machines at Moscow automobile and road construction state technical University (Moscow, Russia);

*V.V. Belyakov* – Doctor of Technical Sciences, Head of research and innovation Department at Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia);

*K.A. Goncharov* – Doctor of Technical Sciences, Professor at the Department of ground transport and technology at the Russian University of Transport (Moscow, Russia);

*A.V. Vershinsky* - Doctor of Technical Sciences, Professor of Department of lifting and transport system at Moscow State Technical University named N.E. Bauman (Moscow, Russia);

*A.A. Korotky* - Doctor of Technical Sciences, Head of department of transport systems and logistics at Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russia);

*A.V. Lagerev* - Doctor of Technical Sciences, Professor at the Department of ground transport and technology at the Russian University of Transport (Moscow, Russia);

*I.A. Lagerev* – Doctor of Technical Sciences, Rector at Kuban State Technological University (Krasnodar, Russia);

*V.M. Pashkevich* - Doctor of Technical Sciences, Vice-Rector at Belarusian-Russian University (Mogilev, Belarus Republic);

*A.V. Rybakov* - Doctor of Technical Sciences, Head of Laboratory of information technologies and providing the population at Academy of civil defence EMERCOM of Russia (Khimki, Russia);

Электронный журнал «Научно-технический вестник Брянского государственного университета» зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации: Эл № ФС77-62798 от 18 августа 2015 г.

16+

Ответственность за точность фактологического материала, используемого в статьях, несут авторы.

© Научно-технический вестник Брянского государственного университета, 2026

© 2026 Nauchno-tekhnicheskii vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta



The Journal and its metadata are licensed under CC BY-SA

## СОДЕРЖАНИЕ

## ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

**Машиноведение, наземные транспортно-технологические средства и процессы**

Статьи, опубликованные в этом разделе, соответствуют требованиям Перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук, на соискание ученой степени кандидата наук по специальностям научных работников 2.5.2; 2.5.11; 2.5.21

Статьи, опубликованные в этом разделе, соответствуют требованиям к журналам категории К2 Перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук, на соискание ученой степени кандидата наук (Информационное письмо ВАК при Минобрнауки России от 06.12.2022 № 02-1198)

Статьи, опубликованные в этом разделе, соответствуют требованиям к журналам уровня 3 Единого государственного перечня научных изданий - «Белый список» (Протокол заседания Межведомственной рабочей группы от 17.07.2025 № ДС/110)

Артемов В.Н., Малкин И.В. (Москва, Россия)

DOI: 10.22281/2413-9920-2026-12-02-89-98

Исследование незаглушенного шума выхлопа автомобиля с гибридной энергоустановкой на основе водородных топливных элементов и аккумуляторов ..... 89

Гнездилов С.Г. (Москва, Россия)

DOI: 10.22281/2413-9920-2026-12-02-99-110

Топологическая оптимизация деталей с проушинами: двухэтапный метод и оценка способов моделирования граничных условий ..... 99

Гончаров К.А., Григорьев П.А., Чалова М.Ю. (Москва, Россия)

DOI: 10.22281/2413-9920-2026-12-02-111-119

Повышение точности определения ширины грузонесущей ленты ленточного конвейера на основе детализации факторов площади поперечного сечения ..... 111

Лагерева А.В. (Москва, Россия)

DOI: 10.22281/2413-9920-2026-12-02-120-135

Механические и гидродинамические процессы при трехфазном эрозионном изнашивании ..... 120

Лесковец И.В., Бойко Г.В., Федин А.П. (Могилев, Беларусь; Волгоград, Россия)

DOI: 10.22281/2413-9920-2026-12-02-136-145

Нагруженность опорных катков гусеничного движителя бульдозера ..... 136

Наказной И.О., Наказной О.А. (Москва, Россия)

DOI: 10.22281/2413-9920-2026-12-02-146-159

Влияние подвижности бронированных и небронированных машин на защищенность от основных видов неуправляемых противотанковых средств поражения. 146

**Информатика, вычислительная техника и управление**

Умека Ю.Б., Муса Д.И., Угеоке И.Б., Нурудин А.Х. (Абуджа, Нигерия)

DOI: 10.22281/2413-9920-2000-00-00-160-167

Моделирование и оптимизация сервисных операций в банковской системе на основе Flexsim ..... 160

## CONTENT

## ENGINEERING SCIENCE

**Machinery, ground transportation and technological means and processes**

The articles published in this section comply with the requirements of the List of peer-reviewed scientific publications, in which the main scientific results of dissertations for the degree of Doctor of Science, for the degree of Candidate of Science in the specialties of scientific workers 2.5.2; 2.5.11; 2.5.21

The articles published in this section meet the requirements for journals of category K2 of the List of peer-reviewed scientific publications, in which the main scientific results of dissertations for the degree of Doctor of Science, for the degree of Candidate of Science (Information letter of the Higher Attestation Commission under the Ministry of Education and Science of Russia of December 6, 2022 No. 02-1198)

The articles published in this section meet the requirements for journals of level 3 of the Unified State List of Scientific Publications - the "White List" (Protocol of the Interdepartmental Working Group of July 17, 2025 No. DS/110)

*Artemyev V.N., Malkin I.V. (Moscow, Russian Federation)*

DOI: 10.22281/2413-9920-2026-12-02-89-98

Experimental study of the unsilenced exhaust noise of a hydrogen fuel cell electric vehicle ..... 89

*Gnezdilov S.G. (Moscow, Russian Federation)*

DOI: 10.22281/2413-9920-2026-12-02-99-110

Topology optimization of parts with lugs: a two-stage method and evaluation of boundary condition modeling techniques ..... 99

*Goncharov K.A., Grigorev P.A., Chalova M.Yu. (Moscow, Russian Federation)*

DOI: 10.22281/2413-9920-2026-12-02-111-119

Improving the accuracy of determining the width of the load carrier conveyor belts based on detailing cross-sectional area factors ..... 111

*Lagerev A.V. (Moscow, Russian Federation)*

DOI: 10.22281/2413-9920-2026-12-02-120-135

Mechanical and hydrodynamic processes in three-phase erosive wear ..... 120

*Leskovets I.V., Boyko G.V., Fedin A.P. (Mogilev, Belarus; Volgograd, Russian Federation)*

DOI: 10.22281/2413-9920-2026-12-02-136-145

Loading of the support rollers of the crawler mover of the bulldozer ..... 136

*Nakaznoy I.O., Nakaznoy O.A. (Moscow, Russian Federation)*

DOI: 10.22281/2413-9920-2026-12-02-146-159

The influence of the mobility of tracked vehicles on protection from the main types of unguided anti-tank weapons ..... 146

**Informatics, Computer Science and Controlling**

*Julius Bettluwhobel Umeka, Dagwa Ishaya Musa, Iyenagbe Benjamin Ugheoke, Abdulhakeem Hassan Nurudeen (Abuja, Nigeria)*

DOI: 10.22281/2413-9920-2000-00-00-160-167

Simulation and optimization of service operations in a banking system based on Flexsim ..... 160

УДК (УДК) 629.113

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЗАГЛУШЕННОГО ШУМА ВЫХЛОПА АВТОМОБИЛЯ С ГИБРИДНОЙ ЭНЕРГОУСТАНОВКОЙ НА ОСНОВЕ ВОДОРОДНЫХ ТОПЛИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И АККУМУЛЯТОРОВ

## EXPERIMENTAL STUDY OF THE UNSILENCED EXHAUST NOISE OF A HYDROGEN FUEL CELL ELECTRIC VEHICLE

Артемьев В.Н., Малкин И.В.  
Artemyev V.N., Malkin I.V.ГНЦ РФ ФГУП «НАМИ» (Москва, Россия)  
Central Scientific and Research Institute of Automobiles and Automotive Engines NAMI (Moscow, Russia)

**Аннотация.** В рамках растущих требований к экологичности транспортных средств и потенциального достижения углеродной нейтральности на транспорте, автомобили с гибридными энергоустановками на основе водородных топливных элементов и аккумуляторов, спроектированные на модульных платформах, находят все большее распространение. В настоящее время тема проектирования систем шумоглушения для автомобилей с данным типом энергетической установки недостаточно освещена. В разрезе автомобильных модульных платформ также необходим анализ возможностей унификации системы шумоглушения для автомобиля с подобной гибридной энергоустановкой от соплатформенного автомобиля с двигателем внутреннего сгорания. В работе представлены результаты экспериментальных исследований по оценке незаглушенного шума выхлопа электрохимического генератора тока в составе гибридной энергоустановки автомобиля. Графически представлены обобщенные (интегральные) уровни звукового давления (уровни шума) незаглушенного выхлопа в контрольной измерительной точке, а также 1/3-октавный анализ для электрохимического генератора тока в составе гибридной энергоустановки автомобиля. Проведено сравнение данных показателей со значениями, полученными после испытаний соплатформенного автомобиля с двигателем внутреннего сгорания. Сделаны выводы о возможности унификации систем шумоглушения для автомобилей с гибридными энергоустановками на основе водородных топливных элементов и аккумуляторов и с двигателями внутреннего сгорания, сконструированных на модульных платформах. Полученные результаты исследования могут быть использованы для проектирования эффективных настроенных глушителей шума выхлопа для автомобилей с гибридными энергоустановками на основе водородных топливных элементов и аккумуляторов.

**Ключевые слова:** автомобиль с гибридной энергоустановкой, шум выхлопа, электрохимический генератор, модульные платформы для транспортных средств.

**Abstract.** Hydrogen Fuel Cell Electric Vehicles (FCEVs) and Plug-in Fuel Cell Electric Vehicles (PFCV) designed on modular platforms are becoming increasingly common due to the growing demands on environmental friendliness of vehicles and the potential achievement of carbon neutrality in transport. The topic of exhaust systems for vehicles with this type of power source currently is not sufficiently explained. It is necessary to analyze the possibilities of unifying the exhaust system for a vehicle with a Hydrogen Fuel Cell (FC) from a co-platform vehicle with an internal combustion engine (ICE) in the context of modular platforms for vehicles. This article presents the results of experimental studies for evaluation the unsilenced exhaust noise of a Fuel Cell in a vehicle. The graphical images presented in this article represent the overall (integral) sound pressure levels or noise levels of the unsilenced exhaust in the control point, as well as a 1/3-octave analysis for the Hydrogen Fuel Cell in the vehicle. These indicators are compared with the values obtained after testing a co-platform vehicle with an internal combustion engine. Conclusions are drawn about the possibility of unifying exhaust systems for vehicles with Hydrogen Fuel Cells and with Internal Combustion Engines designed on modular platforms. The obtained research results can be used to design effective exhaust systems for Hydrogen Fuel Cells Electric Vehicles (FCEVs).

**Keywords:** fuel cell electric vehicle, exhaust noise, electrochemical generator, modular platforms for vehicles.

<i>Дата получения статьи:</i>	03.03.2026	†	<i>Date of manuscript reception:</i>	03.03.2026
<i>Дата принятия к публикации:</i>	10.04.2026	†	<i>Date of acceptance for publication:</i>	10.04.2026
<i>Дата публикации:</i>	25.06.2026	†	<i>Date of publication:</i>	25.06.2026

**Сведения об авторах:**

**Артемьев Вадим Николаевич** – аспирант, инженер-конструктор 2 категории бюро цифрового макета и платформ управления общей интеграции и архитектуры центра транспортных средств и систем ГНЦ РФ ФГУП «НАМИ»,

*e-mail:* vadim.artemev@nami.ru.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-3593-0450>

**Малкин Илья Владимирович** – главный специалист отдела экологии энергоустановок управления систем энергоустановок центра «Энергоустановки» ГНЦ РФ ФГУП «НАМИ»,

*e-mail:* ilia.malkin@nami.ru.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-6479-3681>

**Authors' information:**

**Vadim N. Artemev** – Postgraduate student, Cat. 2 Design-Engineer, Bureau of Digital Layout and Platforms, Department of General Integration and Architecture, Center of Vehicles and Systems of the Central Scientific and Research Institute of Automobiles and Automotive Engines NAMI,

*e-mail:* vadim.artemev@nami.ru.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-3593-0450>

**Ilya V. Malkin** – Head Specialist, Department of Ecology of Energy Stations, Management of Systems of Energy Stations, Center of Energy Stations of the Central Scientific and Research Institute of Automobiles and Automotive Engines NAMI,

*e-mail:* ilia.malkin@nami.ru.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-6479-3681>

**1. Введение**

Вследствие развития технологий и потребностей в большей унификации узлов и агрегатов автомобилей продолжается развитие модульных автомобильных платформ [1]. В рамках растущих требований к экологичности транспортных средств, на модульных платформах проектируются легковые автомобили с гибридными энергетическими установками на основе водородных топливных элементов и аккумуляторов, что в свою очередь обуславливает целесообразность развития методов проектирования, а также повышения эффективности таких транспортных средств [2, 3].

В настоящее время известны работы, связанные с различными типами автомобилей на таковых энергетических установках [4-6]. Направления исследований в области таких транспортных средств чаще всего связаны с особенностями эксплуатации систем хранения водорода, энергетическим менеджментом автомобилей и оптимизацией работы электрохимического генератора тока [7].

В некоторых случаях разработка автомобилей с гибридными энергоустановками на основе топливных элементов и аккумуляторов ведется без рассмотрения конкретной связи транспортных средств с модульными

платформами, на которых данные автомобили спроектированы [4, 5].

В контексте модульных платформ стоит задача по достижению большей унификации узлов, независимо от энергетической или силовой установки, которой должен быть оснащен автомобиль [8, 9]. Однако не все узлы базового транспортного средства можно однозначно переустановить с незначительными изменениями или без таковых на автомобиль с иной энергетической установкой.

Одной из таковых систем при разработке потенциально является система выпуска отработавших газов транспортного средства, выполняющая функцию шумоглушения. Для энергоустановки на основе водородных топливных элементов значимость данной системы очень высока, а характер распределения незаглушенного шума может существенно отличаться от показателей двигателя внутреннего сгорания (ДВС) [10]. В исследовании [10] также упоминается необходимость в удалении влаги при проектировании подобных систем из-за особенностей работы электрохимического генератора тока.

Обобщая обзор источников, следует отметить, что исследований шумов работы данной комбинированной энергетической установки и разработки систем шумоглушения в транспортных средствах с гибридными энергоустановками на основе водородных

топливных элементов в контексте модульных платформ недостаточно, так как проектирование подобных систем крупные автомобильные производители, как правило, отдают специализированным организациям, таким, например, как Eberspacher, Tenneco, Forvia, Walker или др. [11, 12].

## 2. Постановка задачи

Были проведены статические испытания электрохимического генератора тока с целью анализа специфики работы агрегата в составе автомобиля.

Для осуществления цели были поставлены задачи по оценке незаглушенного шума выхлопа электрохимического генератора тока в составе гибридной энергетической установки автомобиля на основе топливных элементов и аккумуляторов, а также по оценке возможности унификации системы шумоглушения между автомобилями с ДВС и с водородным топливным элементом на модульной платформе.

Данный анализ необходим для проектирования низкошумной конструкции системы выпуска отработавших газов по принципу предварительных расчетов по известным незаглушенным спектрам шума.

## 3. Объект исследования

Объектом исследования является прототип автомобиля с гибридной энергетической установкой на основе водородного топливного элемента и аккумулятора, внешний вид и характеристики которого приведены на рис. 1 и в табл. 1, имеющий серийный аналог с ДВС, сконструированный на модульной платформе.

Изображение типового электрохимического генератора тока показано на рис. 2, характеристики исследуемого электрохимического генератора приведены в табл. 2. Принципиальная схема энергетической установки с основными элементами и вспомогательным оборудованием представлена на рис. 3.



Рис. 1. Внешний вид автомобиля с гибридной энергетической установкой на основе водородного топливного элемента и аккумулятора

Таблица 1

Характеристики прототипа

Параметр	Значение
Длина, мм	5650
Ширина, мм	2050
Высота, мм	1700
Колесная база, мм	3300

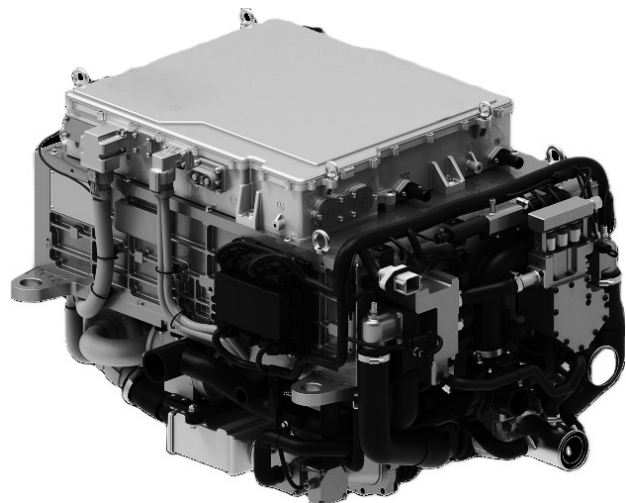


Рис. 2. Типовой электрохимический генератор тока, устанавливаемый на автомобиле с гибридной энергетической установкой на основе водородного топливного элемента и аккумулятора

Таблица 2  
 Характеристики энергетической установки

Параметр	Значение
Пиковая мощность после преобразователя постоянного тока, кВт	120...135
Номинальная мощность после преобразователя постоянного тока, кВт	110...120
Масса электрохимического генератора тока, кг	225
КПД максимальный, %	57
КПД на номинальной мощности, %	42

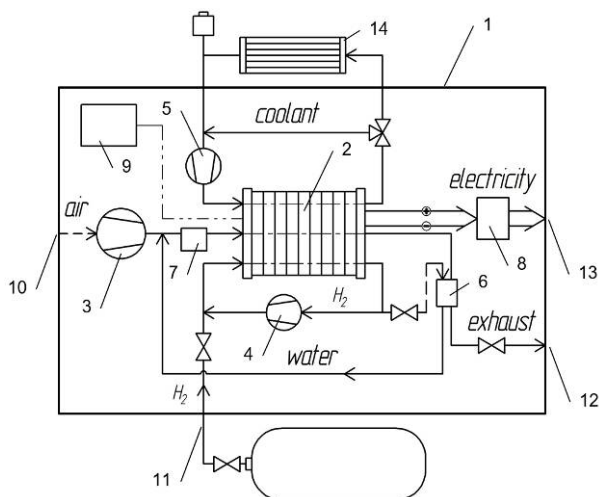


Рис. 3. Принципиальная схема энергетической установки

На рис. 3 обозначены: 1 – электрохимический генератор тока; 2 – батарея топливных элементов; 3 – компрессор подачи воздуха; 4 – компрессор подачи водорода; 5 – насос охлаждающей жидкости; 6 – влагоотделитель; 7 – увлажнитель; 8 – преобразователь постоянного тока; 9 – блок управления топливным элементом; 10 – подвод воздуха; 11 – подвод водорода; 12 – отвод отработавших газов; 13 – отвод электроэнергии; 14 – радиатор охлаждения.

#### 4. Методика проведения испытания

Уровни звукового давления (уровни шума) выпуска отработавших газов регистрируются измерительным микрофоном, уста-

навливаемом в контрольной измерительной точке, расположенной на расстоянии 140 мм от открытого среза выпускного патрубка (рис. 4). В связи с ограниченным пространством в зоне измерений, микрофон допустимо располагать практически горизонтально, примерно в середине расстояния от поверхности дорожного покрытия до корпуса автомобиля и ориентировать к срезу выпускного патрубка.



Рис. 4. Схема установки измерительного микрофона

Перед проведением испытаний производится калибровка задействованных средств измерений. Для уменьшения влияния воздействия газового потока на уровни шума на микрофоне применяется ветрозащитный экран.

В качестве результатов измерений выступают значения эквивалентных уровней шума и 1/3 октавных спектров шума, зарегистрированных в звуковом диапазоне частот, усредненных за период измерения не менее 30 секунд, взвешенных по шкале А. Режим записи шумомера-анализатора устанавливается в положение «Slow (медленно)». Регистрация шума проводится на установившемся режиме работы. Для каждого режима измерение шума повторяется как минимум три раза. Фоновый шум в месте установки микрофона должен быть более чем на 15 дБ ниже уровней шума измеряемого объекта в режиме минимальной мощности его работы.

## 5. Результаты проведения эксперимента

Измерения проводились на установившихся режимах работы гибридной энергетической установки с нагружением электрохимического генератора тока от 10 до 70 кВт с шагом в 10 кВт. На рис. 5 представлена измерительная установка для проведения ис-

пытаний по экспериментальной оценке уровней звукового давления. На рис. 6 показана фактическая установка измерительного микрофона в процессе испытаний, где позициями обозначены: 1 – выпускной патрубок отвода уходящий газов, 2 – измерительный микрофон с предусилителем, 3 – ветрозащитный колпак.

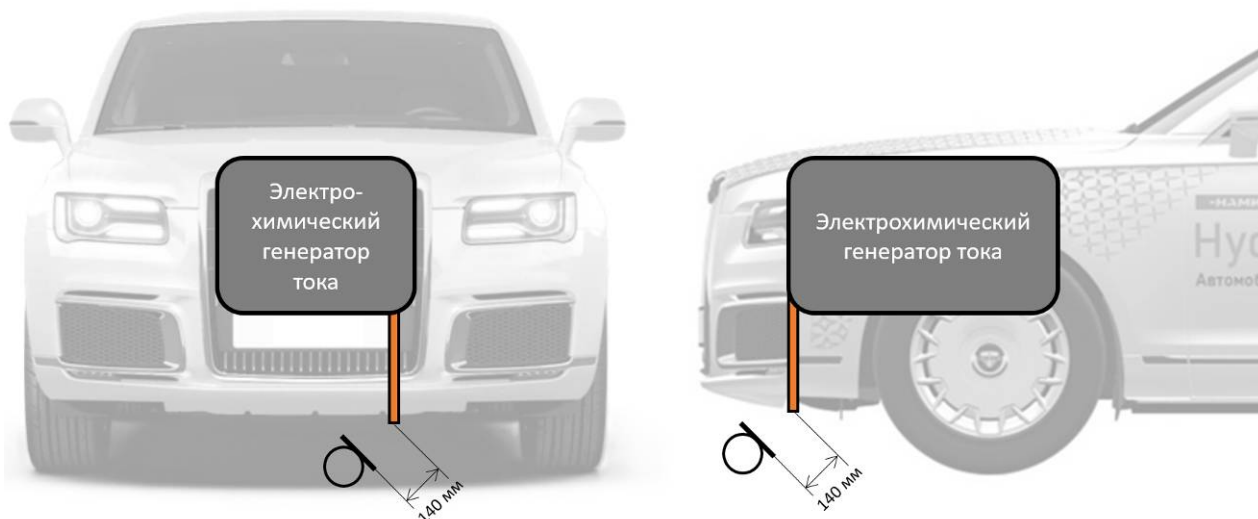


Рис. 5. Установка для экспериментального измерения шума выхлопа автомобиля с гибридной энергетической установкой на основе водородных топливных элементов и аккумуляторов

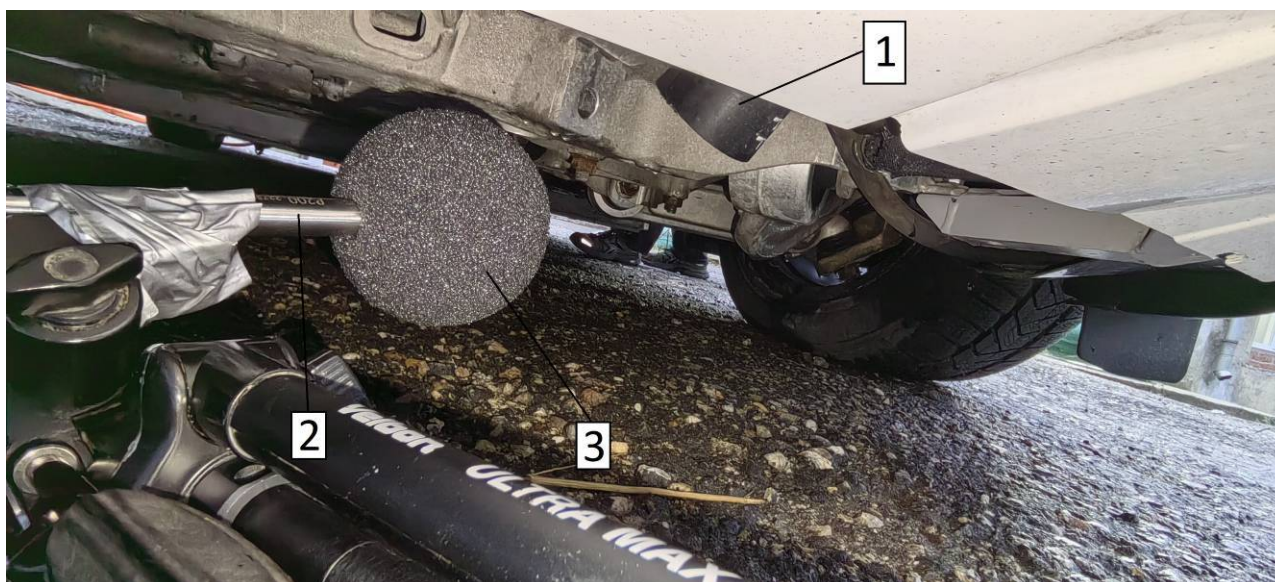


Рис. 6. Пример фактической установки измерительного микрофона в зоне измерений в процессе испытаний

Полученные в результате испытаний общие (интегральные) уровни шума выхлопа электрохимического генератора тока в со-

ставе автомобиля изображены на рис. 7. Общие (интегральные) уровни звукового давления (уровни шума) незаглушенного вы-

хлопа в контрольной измерительной точке, расположенной на расстоянии 140 мм от выходного отверстия, составляют от 98,8 до 124,4 дБА в диапазоне исследованных режимов нагрузки от 10 до 70 кВт. Прямое сравнение с показателями незаглушенного шума выхлопа ДВС, измеряемого в аналогичной точке ближнего звукового поля, является весьма условным, т.к. режимы работы данных энергетической и силовой установок в составе автомобиля сильно различны и зависят, в частности, от спроектированной системы энергоменеджмента.

1/3-октавный спектральный анализ (рис. 8) показывает, что в целом незаглушенное акустическое излучение выхлопа электрохимического генератора в составе гибридной энергоустановки автомобиля представляет

собой широкополосный шум. Доминирующим является высокочастотный диапазон в пределах от 1,6 до 16 кГц. Вместе с этим, в спектрах также выделяются повышенные показатели шума в 1/3-октаве с центром 630 Гц, но они не принимают участие в формировании значений общих уровней, так как значения меньше максимальных на 10...20 дБА. Спектры имеют схожий профиль вне зависимости от режима работы энергетической установки. Фоновый шум, регистрируемый в точке измерений, составляет 62,7 дБА, что значительно ниже незаглушенного шума выхлопа, и, таким образом, не оказывает заметного влияния на уровни полезных сигналов.

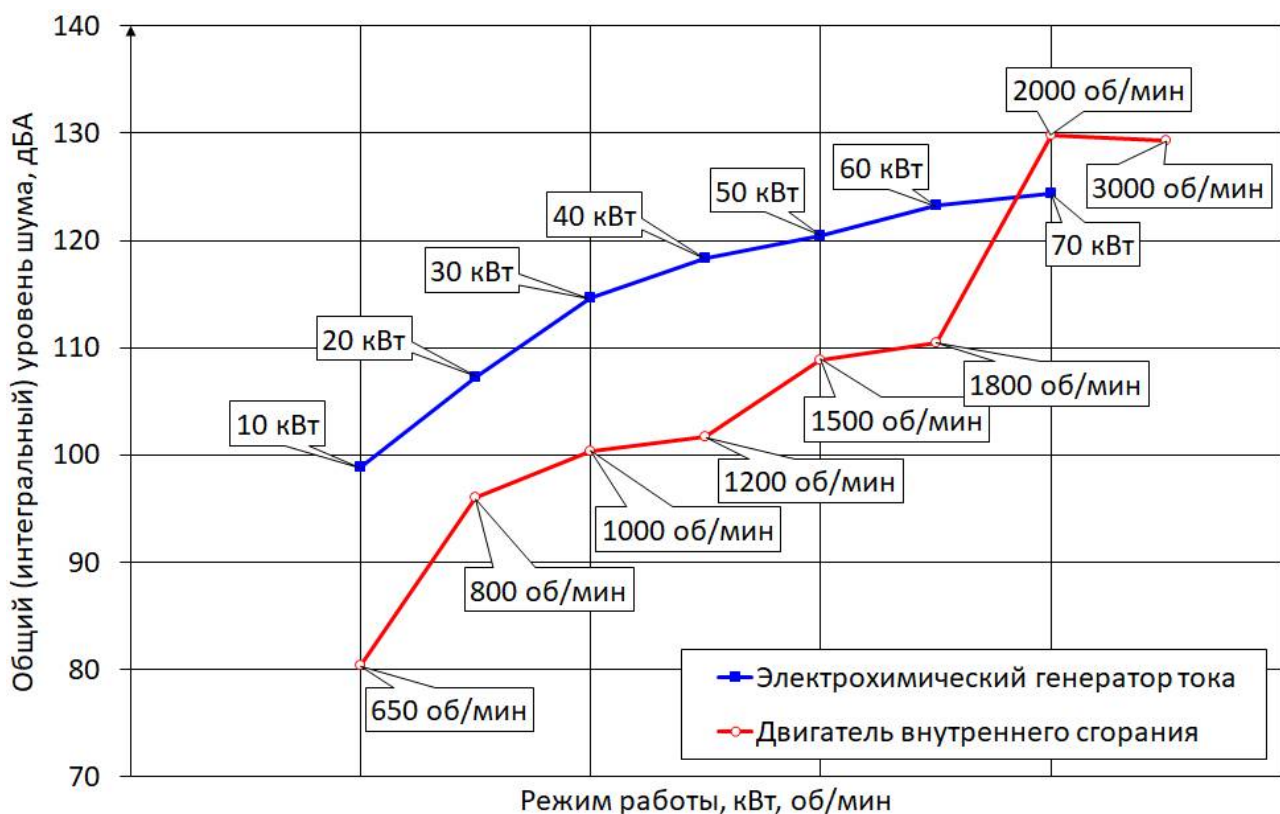


Рис. 7. Сравнение интегральных уровней незаглушенного шума выхлопа автомобиля с гибридной энергоустановкой на основе водородных топливных элементов и аккумуляторов и автомобиля с двигателем внутреннего сгорания

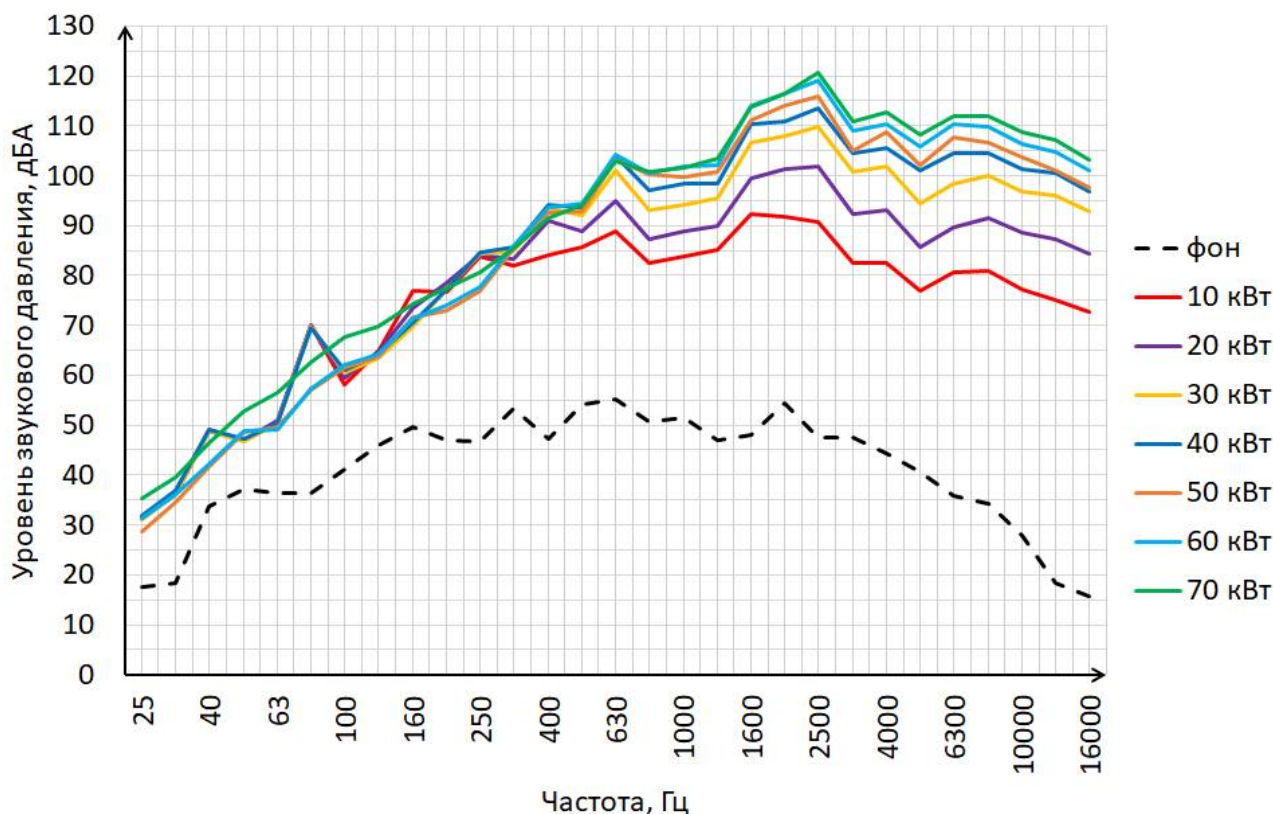


Рис. 8. График 1/3-октавных спектров незаглушенного шума выхлопа электрохимического генератора тока в составе гибридной энергоустановки автомобиля

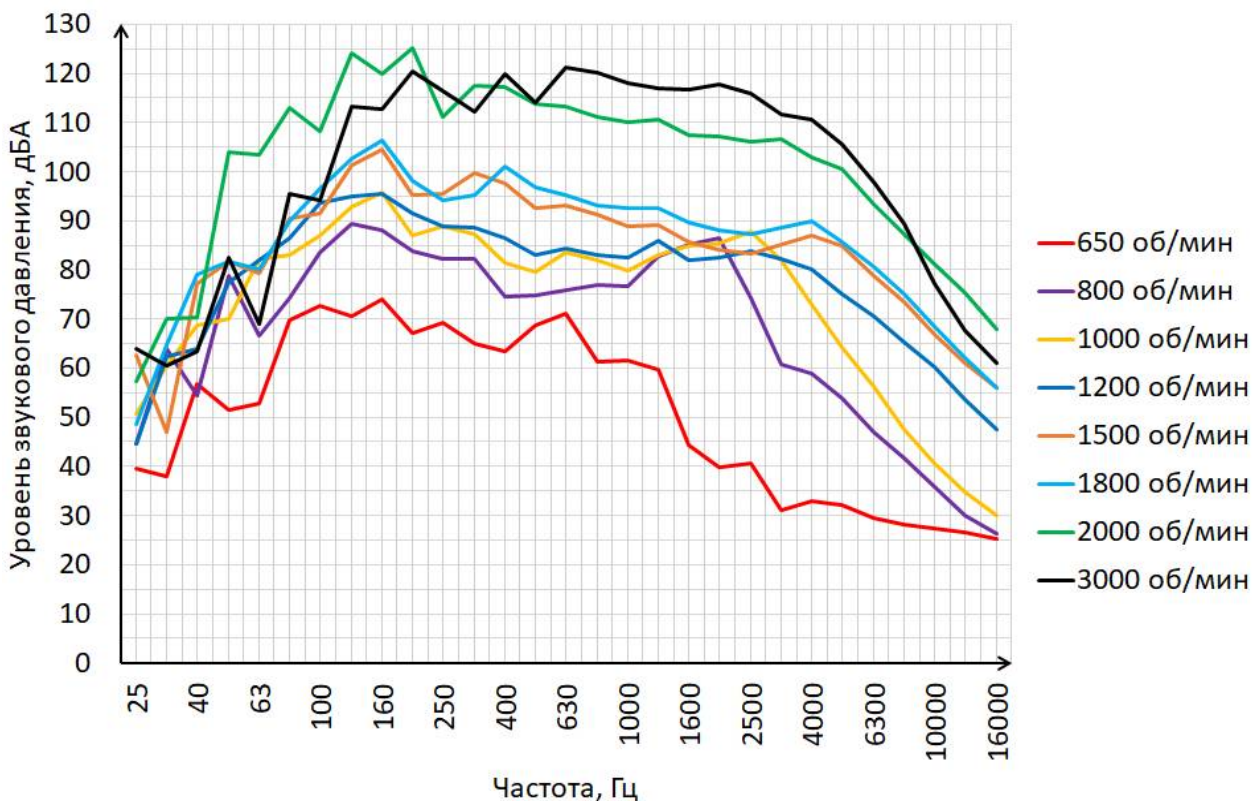


Рис. 9. График 1/3-октавных спектров незаглушенного шума выхлопа ДВС в составе автомобиля

Для ДВС характерны иные значения уровней незаглушенного шума выхлопа (рис. 9) в диапазоне работы ДВС от оборотов холостого хода, равных 650 об/мин, до 3000 об/мин. Спектры шума выхлопа поршневого ДВС в основном формируются звуковыми волнами от рабочего процесса в цилиндрах, которые характеризуются частотами, кратными оборотам коленчатого вала [13]. Эти частоты расположены в звуковом диапазоне преимущественно в низкочастотной области. Таким образом, спектры шума выхлопа ДВС в сравнении со спектрами шума выхлопа электрохимического генератора тока имеют заметно отличающийся профиль с гораздо более высокими значениями уровней в низко- и среднечастотном диапазоне и, напротив, более низкими уровнями в высокочастотном диапазоне. Спектры выхлопа электрохимического генератора представляют собой широкополосные шумы с выделяющимися шипящими высокочастотными составляющими. Кроме этого у электрохимического генератора тока уровни шума выхлопа сгруппированы на графике 1/3-октавных спектров гораздо плотнее, т.е. разброс значений в зависимости от режима нагружения силовой установки меньше, чем у ДВС. Результаты испытаний свидетельствуют о том, что применение классической системы выпуска отработавших газов автомобиля с двигателем внутреннего сгорания может работать неэффективно в случае замены энергетической установки на комбинированную с электрохимическим генератором тока в рамках платформенных изменений. Для автомобиля, оборудованного такой энергоустановкой, необходимо применение индивидуальной системы выпуска отработавших газов, настроенной на подавление доминирующих высоких частот в спектре шума. Это, в какой-то степени, может упростить конструкцию глушителей шума системы выпуска отработавших газов для подобного автомобиля, т.к. отсутствует необходимость эффективного заглушения низкочастотных составляющих, что, как правило, требует применения достаточно больших объемов глушителей шума и эффективной

настроенной компоновки резонаторных элементов [13, 14]. Вместе с этим, существуют дополнительные условия для системы выпуска комбинированной энергетической установки на основе водородных топливных элементов и аккумуляторов – кроме возможности использования более простых в конструктивном плане диссипативных глушителей шума, необходимо учитывать применение дополнительных устройств для удаления сконденсированной влаги [10, 15, 16].

## 6. Заключение

В работе приведены результаты экспериментального исследования незаглушенных шумов электрохимического генератора тока в составе гибридной энергоустановки на водородных топливных элементах и аккумуляторах автомобиля, произведенного на модульной платформе в статическом состоянии. Отмечено, что общие уровни звукового давления составили от 98,8 до 124,4 дБА в диапазоне исследованных режимов нагрузки. По результатам 1/3-октавного анализа, доминирующим является высокочастотный диапазон от 1,6 до 16 кГц. Спектры шума имеют схожий профиль, который мало зависит от режима работы электрохимического генератора тока гибридной энергоустановки.

Отмечено также, что полная унификация системы шумоглушения в контексте модульной платформы для автомобиля с комбинированной энергоустановкой на топливных элементах и аккумуляторах от автомобиля с ДВС невозможна. Ввиду особенностей работы электрохимического генератора тока, также требуется проработка дополнительной возможности удаления сконденсированной влаги из внутренних полостей системы выпуска отработавших газов.

Полученные результаты исследования могут быть использованы для проектирования эффективных настроенных глушителей шума выхлопа для автомобилей с гибридной энергетической установкой на основе водородных топливных элементов и аккумуляторов.

## Список литературы

1. Назаров Ф.Л., Надарейшвили Г.Г., Курмаев Р.Х., Мухаметзянов Р.Г., Чупрунов С.П. Итоги и обзор МАНФ-2025 «Инновации в движении: перспективные технологии автомобильных платформ» // Труды НАМИ. 2025. № 4 (303). С. 6–16.
2. ГОСТ Р 56188.1-2023. Технологии топливных элементов. Часть 1. Терминология. Введ. 2023-05-31.
3. Albatayneh A., Juaidi A., Jaradat M., Manzano-Agugliaro F. Future of electric and hydrogen cars and trucks: an overview // *Energies*. 2023. Vol. 16. No. 7. P. 3230. DOI: 10.3390/en16073230.
4. Muthukumar M., Rengarajan N., Velliyangiri B., Omprakas M.A., Rohit C.B., Raja U.K. The development of fuel cell electric vehicles – A review // *Materials Today: Proceedings*. 2021. Vol. 45. P. 1181-1187. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.03.679
5. Корнилов С.В., Фардеев Л.И., Кудин Д.В., Анисимов В.Р., Зверева Э.Р. Оптимизация параметров комбинированной энергоустановки на водородных топливных элементах для пассажирского транспортного средства полной массой 18 тонн городского исполнения. // *Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики*. 2025. Т. 27. №5. С. 118-129. DOI: 10.30724/1998-9903-2025-27-5-118-129.
6. Nguyen H.L., Lee S.M., Yu S. A comprehensive review of degradation prediction methods for an automotive proton exchange membrane fuel cell // *Energies*. 2023. Vol. 16. No. 12. P. 4772. DOI: 10.3390/en16124772
7. Sorlei I.-S., Bizon N., Thounthong P., Varlam M., Carcadea E., Culcer M., Iliescu M., Raceanu M. Fuel Cell Electric Vehicles — A Brief Review of Current Topologies and Energy Management Strategies // *Energies*. 2021. Vol. 14. No. 1. P. 252. DOI: 10.3390/en14010252.
8. Frank C., Holsten L., Şahin T., Vietor T. How to manage vehicle platform variants? A method to assess platform variance through competitive analysis // *Procedia CIRP*. 2022. Vol. 109. P. 598-603. DOI: 10.1016/j.procir.2022.05.300
9. Liu Z., Liu X., Zhao F. Research on

## References

1. Nazarov F.L., Nadareyshvili G.G., Kurmaev R.Kh., Mukhametzhanov R.G., Chuprunov S.P. Results and review of IASFF-2025 “Innovations in motion: promising technologies of vehicle platforms” *Trudy NAMI*, 2025, No. 4 (303), pp. 6–16. (In Russian).
2. GOST R 56188.1-2023. *Tekhnologii toplivnykh elementov. Chast 1. Terminologiya*. (In Russian)
3. Albatayneh A., Juaidi A., Jaradat M., Manzano-Agugliaro F. Future of electric and hydrogen cars and trucks: an overview. *Energies*, 2023, Vol. 16, No. 7, p. 3230. DOI: 10.3390/en16073230.
4. Muthukumar M., Rengarajan N., Velliyangiri B., Omprakas M.A., Rohit C.B., Raja U.K. The development of fuel cell electric vehicles – A review. *Materials Today: Proceedings*, 2021, Vol. 45, pp. 1181-1187. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.03.679
5. Kornilov S.V., Fardeev L.I., Kudinov D.V., Anisimov V.R., Zvereva E.R. Optimization of the parameters of a combined hydrogen fuel cell power plant for a passenger vehicle with a gross weight of 18 tons of urban use. *Power engineering: research, equipment, technology*, 2025, Vol. 27, No. 5, pp. 118-129. DOI:10.30724/1998-9903-2025-27-5-118-129. (In Russian)
6. Nguyen H.L., Lee S.M., Yu S. A comprehensive review of degradation prediction methods for an automotive proton exchange membrane fuel cell. *Energies*, 2023, Vol. 16, No. 12, p. 4772. DOI: 10.3390/en16124772
7. Sorlei I.-S., Bizon N., Thounthong P., Varlam M., Carcadea E., Culcer M., Iliescu M., Raceanu M. Fuel Cell Electric Vehicles — A Brief Review of Current Topologies and Energy Management Strategies. *Energies*, 2021, Vol. 14, No. 1, p. 252. DOI: 10.3390/en14010252
8. Frank C., Holsten L., Şahin T., Vietor T. How to manage vehicle platform variants? A method to assess platform variance through competitive analysis. *Procedia CIRP*, 2022, Vol. 109, pp. 598-603. DOI: 10.1016/j.procir.2022.05.300
9. Liu Z., Liu X., Zhao F. Research on NEV platform development strategies for

- NEV platform development strategies for automotive companies // *World Electric Vehicle Journal*. 2021. Vol. 12. No. 4. C. 201. DOI: 10.3390/wevj12040201
10. Zhou J., Jiang X., Qiu Y., Chen J., Feng P., Xie Q., Xie X., Tan L. Research on Noise Optimization of Exhaust System for Hydrogen Fuel Cell Vehicles // *SAE 2024 Vehicle Powertrain Diversification Technology Forum*. Xi'an, 2024. DOI: 10.4271/2025-01-7003
11. Kurzydym D. Comparative study of aftermarket and OEM DPFs for Periodic Technical Inspections (PTI) compliance with new PN emission limits // *Combustion Engines*. 2025. Vol. 203. No. 4. P. 126-137. DOI: 10.19206/CE-208400
12. Sontakke A. Impact of vehicle emission and development by OEM // *International Conference on Nascent Technologies in Engineering (ICNTE)*. Vashi, 2017. DOI: 10.1109/ICNTE.2017.7947916.
13. Шатров М.Г., Яковенко А.Л., Кричевская Т.Ю. Шум автомобильных двигателей внутреннего сгорания. Москва: МАДИ, 2014. 68 с.
14. Васильев В.А. Особенности снижения низкочастотного шума автомобильных ДВС с использованием глушителей шума // *Академический журнал Западной Сибири*. 2014. Т. 10. №. 2. С. 1-22.
15. Sazali N., Wan Salleh W.N., Jamaludin A.S., Mhd Razali M.N. New perspectives on fuel cell technology: A brief review // *Membranes*. 2020. Vol. 10. No. 5. P. 99. DOI: 10.3390/membranes10050099
16. Tanaka S., Nagumo K., Yamamoto M., Chiba H., Yoshida K., Okano R. Fuel cell system for Honda CLARITY fuel cell // *eTransportation*. 2020. Vol. 3. P. 100046. DOI: 10.1016/j.etrans.2020.100046
- automotive companies. *World Electric Vehicle Journal*, 2021, Vol. 12, No. 4, p. 201. DOI: 10.3390/wevj12040201
10. Zhou J., Jiang X., Qiu Y., Chen J., Feng P., Xie Q., Xie X., Tan L. Research on Noise Op-timization of Exhaust System for Hydrogen Fuel Cell Vehicles. *SAE 2024 Vehicle Powertrain Diversification Technology Forum*. Xi'an, China, December 2024. DOI: 10.4271/2025-01-7003
11. Kurzydym D. Comparative study of aftermarket and OEM DPFs for Periodic Technical Inspections (PTI) compliance with new PN emission limits. *Combustion Engines*, 2025, Vol. 203, No. 4, pp. 126-137. DOI: 10.19206/CE-208400
12. Sontakke A. Impact of vehicle emission and development by OEM. *International Conference on Nascent Technologies in Engineering (ICNTE)*. Vashi, India, January 2017. DOI: 10.1109/ICNTE.2017.7947916.
13. Shatrov M.G., Yakovenko A.L., Krichevskaya T.Yu. *Shum avtomobilnykh dvigateley vnutrennego sgoraniya* [The noise of automobile internal combustion engines]. Moscow, MADI, 2014. 68 p. (In Russian)
14. Vasilyev V.A. Osobennosti snigeniya nizkochastotnogo shuma avtomobilnykh DVS s ispolzovaniyem glushiteley shuma. *Akademicheskiiy zhurnal Zapadnoy Sibiri*, 2014, Vol. 10, No. 2, pp. 1-22. (In Russian)
15. Sazali N., Wan Salleh W.N., Jamaludin A.S., Mhd Razali M.N. New perspectives on fuel cell technology: A brief review. *Membranes*, 2020, Vol. 10, No. 5, p. 99. DOI: 10.3390/membranes10050099
16. Tanaka S., Nagumo K., Yamamoto M., Chiba H., Yoshida K., Okano R. Fuel cell system for Honda CLARITY fuel cell. *eTransportation*, 2020, Vol. 3, p. 100046. DOI: 10.1016/j.etrans.2020.100046

УДК (УДК) 621.86/.87

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ДЕТАЛЕЙ С ПРОУШИНАМИ:  
ДВУХЭТАПНЫЙ МЕТОД И ОЦЕНКА СПОСОБОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙTOPOLOGY OPTIMIZATION OF PARTS WITH LUGS: A TWO-STAGE METHOD  
AND EVALUATION OF BOUNDARY CONDITION MODELING TECHNIQUESГнездилов С.Г.  
Gnezdilov S.G.Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (Москва, Россия)  
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (Москва, Россия)  
Bauman Moscow State Technical University (Moscow, Russian Federation)  
National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (Moscow, Russian Federation)

**Аннотация.** Топологическая оптимизация деталей с проушинами часто приводит к некорректным результатам из-за упрощенного задания граничных условий, таких как жесткая фиксация или точечное приложение нагрузки, что не соответствует реальному характеру контактного взаимодействия. Целью данного исследования является разработка и апробация методики, обеспечивающей повышение точности и вычислительной эффективности моделирования проушин в задачах топологической оптимизации. На основе сравнительного анализа инструментов ANSYS Workbench (Bearing Load, Remote Displacement, контактные задачи) доказано, что применение распределенной нагрузки типа Bearing Load позволяет приблизить результаты линейного анализа к эталонным нелинейным контактным решениям. Предложен двухэтапный метод оптимизации, в котором на первом этапе определяются реакции в связях, а на втором — они заменяются эквивалентными силами, что позволяет свести нелинейную задачу к линейной без существенной потери точности. Метод валидирован на примерах оптимизации звена манипулятора и механической детали с несколькими проушинами. Результаты демонстрируют высокую чувствительность итоговой топологии к способу моделирования нагружения и подтверждают практическую эффективность предложенного подхода для инженерных расчетов, позволяя учитывать множество расчетных случаев при умеренных вычислительных затратах.

**Ключевые слова:** топологическая оптимизация, проушины, конечно-элементный анализ.

**Дата получения статьи:** 03.01.2026  
**Дата принятия к публикации:** 15.02.2026  
**Дата публикации:** 25.06.2026

**Abstract.** Topological optimization of parts with lugs often yields incorrect results due to the simplified assignment of boundary conditions, such as rigid fixation or point load application, which does not correspond to the actual nature of contact interaction. The aim of this study is to develop and test a methodology that improves the accuracy and computational efficiency of modeling lugs in topology optimization problems. Based on a comparative analysis of ANSYS Workbench tools (Bearing Load, Remote Displacement, contact problems), it is proven that applying a distributed load of the Bearing Load type allows linear analysis results to approximate reference nonlinear contact solutions. A two-stage optimization method is proposed, wherein the first stage determines reactions in the supports, and the second stage replaces them with equivalent forces, enabling the reduction of a nonlinear problem to a linear one without significant loss of accuracy. The method is validated using examples of optimizing a manipulator link and a mechanical part with multiple lugs. The results demonstrate the high sensitivity of the final topology to the load modeling approach and confirm the practical effectiveness of the proposed method for engineering analysis, allowing for the consideration of multiple load cases with moderate computational costs.

**Keywords:** topology optimization, lugs, finite element analysis.

**Date of manuscript reception:** 03.01.2026  
**Date of acceptance for publication:** 15.02.2026  
**Date of publication:** 25.06.2026

**Сведения об автору:**

**Гнездилов Сергей Геннадьевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Подъемно-транспортные системы» Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», e-mail: [gnezdilov@bmstu.ru](mailto:gnezdilov@bmstu.ru).

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3215-3840>

**Author's information:**

**Sergey G. Gnezdilov** – PhD in Engineering, Associate Professor, Associate Professor of Department of Hoisting and Conveying Systems, Bauman Moscow State Technical University, Associate Professor of Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Machine Strength, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", e-mail: [gnezdilov@bmstu.ru](mailto:gnezdilov@bmstu.ru).

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3215-3840>

## 1. Введение

Проушина является основным конструктивным элементом детали, служащий для её шарнирного соединения с другими деталями или крепления к основанию. Проушины воспринимают и передают нагрузки, обеспечивая поворот одной детали относительно другой, и весьма распространены в различных изделиях, что делает актуальным применение эффективных методов их моделирования в рамках топологической оптимизации.

В зависимости от характера воздействия эксплуатационной внешней нагрузки на проушину можно выделить две группы проушин: 1) проушина работает на отрыв, 2) проушина воспринимает разнонаправленные нагрузки. Проушины могут быть подразделены на силовые (воспринимают основные рабочие нагрузки) и несиловые (обеспечивают кинематическую заданность или геометрическую неизменяемость механизма).

Анализ результатов топологической оптимизации, полученных в разных исследованиях [1–4], выявил требующие уточнения подходы к моделированию областей вблизи силовых проушин, что указывает на различную методологию, применяемую при подготовке расчетных моделей. Во многих исследованиях [5] проушины моделируются в виде точечного закрепления [6] либо простой заделки [3]. Точечное закрепление, широко используемое при решении тестовых задач, эффективно в рамках концептуальной оптимизации, направленной, например, на проектирование стержневых конструкций [7,8]. Однако концептуальная оптимизация малоприменима для решения многих практических задач по моделированию отдельных деталей, что требует иных подходов, учитывающих специфику граничных условий.

При решении задач топологической оптимизации в качестве критериев оптимальности используют минимум податливости (максимум жесткости) при заданной доле материала либо минимум массы при напряжении (по теории Мизеса), не превышающем предел текучести [9]. Оптимизация на основе податливости используется чаще из-за простоты реализации, вычислительной эффективности и высокой жесткости итоговых решений. Оптимизация по напряжениям требует сравнительно больших вычислительных ресурсов и актуальна для критичных по прочности конструкций, при работе с хрупкими материалами с недопустимой концентрацией напряжений.

## 2. Оценка способов нагружения проушин

Распространена практика [3,10], когда в рамках топологической оптимизации часть проушин (для обеспечения геометрической неизменяемости) жестко фиксируют, а к остальным проушинам прикладывают известные нагрузки. Такая жесткая фиксация не всегда приемлема, в том числе из-за того, что это создает избыточные связи. Некоторые широко применяемые инструменты фиксации неудовлетворительным образом учитывают реальный характер взаимодействия в соединении проушины. Для оценки влияния способа моделирования граничных условий (в проушинах) на результаты конечно-элементного анализа (и, как следствие, на результаты топологической оптимизации) проведен соответствующий сравнительный анализ (ряд одинаковых смоделированных с применением разных инструментов проушин нагружен растягивающей силой  $F_{II}=1000$  Н; расчетная схема на рис. 1), результаты которого представлены на рис. 2 (результаты

нормированы для обеспечения единообразия их представления).

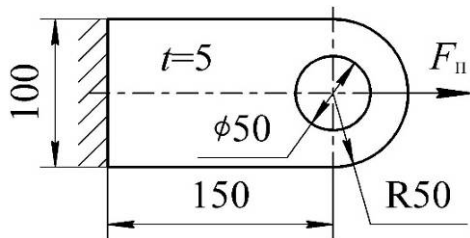


Рис. 1. Расчетная схема проушины

Результаты демонстрируют существенные различия напряженно-деформированного состояния проушин. Эталонным является результат, полученный на основе решения контактной задачи оси и проушины (рис. 2, а). В отношении напряженного состояния наиболее близким к «эталонному» является способ нагружения проушины с использованием инструмента *Bearing Load* (рис. 2, б) (упрощенный способ задания распределенной нагрузки, имитирующей контакт с телом вращения, без учета нелинейностей реального контакта, применяемый для линейного анализа), в меньшей степени «эталону» соответствует способ фиксации проушины по внутренней грани отверстия с использованием инструмента *Remote Displacement* (тип *Deformable*) (рис. 2, г). В этом случае (а также в случаях жесткой фиксации (рис. 2, в) и цилиндрической опоры (рис. 2, д) в отверстии) у левой опоры убрана связь, ограничивающая перемещение по горизонтали, и к левой грани приложена сила  $F_{II}$ . Два других способа моделирования (рис. 2, в, д) показали неудовлетворительные результаты: усилие передается не через ободок проушины, как первом случае, а через ее центральную часть, что далеко от действительности (рис. 2, а).

Дающий наилучшие результаты подход (решение контактной задачи, см. рис. 2, а) к моделированию граничных условий предполагает учет нелинейности контактного взаимодействия в проушинах [11], что требует сравнительно больших вычислительных ресурсов, а соответствующий функционал реализован в ограниченном числе программных комплексов. В связи с этим востребованы решения, позволяющие решать задачи топо-

логической оптимизации в линейной постановке, обеспечивая максимально близкие к эталонным решения за сравнительно короткое время.

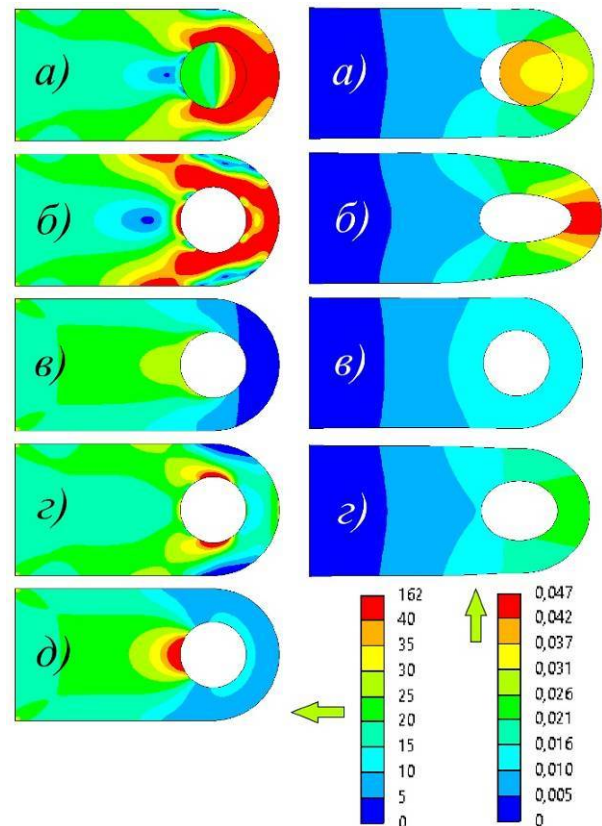


Рис. 2. Карты эквивалентных напряжений (по Мизесу, МПа) (слева) и перемещений (мм) (справа; перемещения увеличены в 500 раз) для разных способов моделирования проушины: а – контактная задача (ось – проушина без зазора), б – нагружение проушины с использованием инструмента *Bearing Load*, в – жесткая фиксация проушины по внутренней грани отверстия (инструмент *Fixed Support*), г – фиксация проушины по внутренней грани отверстия (инструмент *Remote Displacement* тип *Deformable*), д – фиксация проушины по внутренней грани отверстия (инструмент *Cylindrical Support*) (перемещения не показаны из-за сложности с нормализацией и неудовлетворительных результатов по напряжениям)

Далее подробнее рассмотрены показавшие наибольшую эффективность способы задания граничных условий в проушинах.

### 3. Обоснование эффективного способа моделирования проушин

В целом внешний вид проушин интуитивно понятен и вполне конкретно формализован [12]. Однако с точки зрения топологической оптимизации, призванной уменьшить массу (увеличить жесткость) объекта, не все так очевидно. Более того, характер нагружения проушины в значительной степени влияет на наиболее рациональное конструктивное исполнение (топологию) детали вблизи проушины.

Далее в плоской постановке проанализировано влияние способов моделирования проушины на ее наиболее рациональное конструктивное исполнение (на основе доступных в *ANSYS Workbench 19.2* инструментов) для двух случаев нагружения: 1) характер нагружения проушины неизменен во времени, 2) в разные моменты времени проушины воспринимает разные нагрузки.

#### 3.1. Описание расчетных схем и моделей

В первом случае рассмотрено простое растяжение проушины силой  $F_1=30\text{кН}$ , направление и значение которой неизменны на протяжении всего периода эксплуатации объекта (рис. 3, а). Аналогичным образом нагружены объекты с парой ключевых точек, к которым приложена пара внешних сил, которые при условии пренебрежения весом объекта лежат на одной прямой линии и направлены в противоположные стороны (например, звенья некоторых цепей [13]). Приняты следующие значения геометрических размеров:  $d=50\text{ мм}$ ,  $R=90\text{ мм}$ ,  $B=600\text{ мм}$ ,  $H=150\text{ мм}$ ,  $t=10\text{ мм}$ .

Оптимизационная модель такой проушины (рис. 3, а) реализована четырьмя разными способами: 1) нелинейная задача с контактным взаимодействием оси и проушины (тип *Frictionless*), обеспечивающая наиболее корректные результаты для заданного критерия оптимальности (в *ANSYS Workbench 19.2* инструмент доступен как бета-функция)[11]; 2) приложение в отверстии наиболее адекватной рассматриваемому случаю нагрузки типа *Bearing Load*; 3) использование контакта ти-

па *No Separation* (передача силы от оси к отверстию через половину поверхности, непосредственно участвующей в передаче усилия); 4) на основе закрепления отверстия проушины с применением инструмента *Remote Displacement* тип *Deformable*. Оптимизация по первому способу допускается лишь в соответствии с критерием максимума жесткости, во втором способе подобное ограничение отсутствуют, в третьем – оптимизация возможна на основе разных критериев оптимальности, однако при этом затруднен учет нескольких сочетаний нагрузок, а для реализации четвертого способа расчетная схема (рис. 3, а) слегка трансформируется: в отверстии вводится ограничение *Remote Displacement* (тип *Deformable*), абсолютно жесткое основание (к нему приложена сила  $F_1$ , которая направлена вниз) имеет одну степень подвижности по вертикали. В рамках данного исследования не рассматривалась применимость инструментов *Force* и *Remote Force* ввиду того, что инструмент *Bearing Load* точнее отражает физику нагружения проушин.

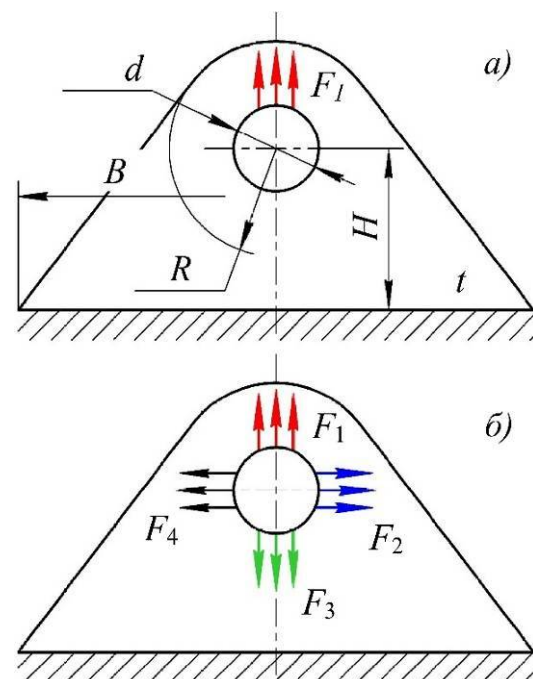


Рис. 3. Расчетные схемы проушины: а – случай простого растяжения проушины, б – случай нагружения проушины силой, направление которой меняется во времени (действующие в разные моменты времени силы выделены различными цветами)

Во втором случае (рис. 3, б) выполнено моделирование проушины, нагруженной силой, направление которой меняется во времени, двумя способами посредством создания четырех независимых статических нагрузок, учитываемых оптимизатором: 1) создано несколько шагов статического анализа, на каждом из которых заданы силы (нагрузки типа *Bearing Load*) для разных случаев; 2) создано несколько блоков статического анализа для разных расчетных случаев с решением контактной задачи (тип *Frictionless*). Для получения симметричной топологии в модели введено соответствующее ограничение. Как и в предыдущем случае (рис. 3, а), приняты те же самые размеры проушины и значения сил, которые равны  $F_1=F_2=F_3=F_4=30\text{кН}$ .

### 3.2. Настройка программы

Топологическая оптимизация выполнена с использованием блока *Topology Optimization* (в основе итеративный метод, основанный на псевдоплотности) со следующими параметрами оптимизации: минимальная нормированная плотность – 0,001; точность сходимости – 0,01; штрафной показатель (для жесткости) – 3; размер квадратичных треугольных конечных элементов (второго порядка) с 6 узлами (*PLANE183*) – от 3 до 5 мм. В качестве области оптимизации выбрана вся геометрия, запретная область (область исключения) не задавалась. В качестве критериев оптимальности приняты минимум массы и максимум жесткости (минимум податливости) результирующей топологии. Поиск минимума массы выполнен с учетом ограничения глобального эквивалентного напряжения по Мизесу (не более 100 МПа), а максимума жесткости – при ограничении допустимой доли объема (20% от исходной области).

### 3.3. Результаты моделирования

Результаты моделирования (на основе различных способов) нагруженной одной силой (рис. 3, а) проушины представлены на рис. 4. Красным цветом выделена искомая

топология, зеленым – ось, через которую (при наличии оси) усилие передается на проушину, серым – исходная область проектирования (обрезана по краям). Наиболее корректные результаты дает моделирование на основе контактного взаимодействия оси и проушины (тип *Frictionless*) (рис. 4, а). Заметно значительное сходство результатов, полученных разными способами (контакты типа *Frictionless* и *No Separation*) на основе контактного взаимодействия оси и проушины (рис. 4, а и б).

Наблюдается также заметное различие топологии, полученной для разных критериев оптимальности (рис. 4, а–г – максимум жесткости и рис. 4, д, е – минимум массы): по критерию максимума жесткости получается менее «габаритное» решение, хотя в большинстве случаев (рис. 4, а–в) результаты представлены в виде полосы (с некоторыми локальными изменениями ширины преимущественно вблизи отверстия), огибающей отверстие. В то же время заметно сходство результатов в пределах одного критерия оптимальности.

Результаты оптимизации для случая приложения к проушине нагрузки, направление которой меняется во времени, представлены на рис. 5. Хотя полученная по разным критериям оптимальности топология имеет существенные различия, фактическая эффективность решений близка, а на практике в качестве критерия оптимальности по ряду причин чаще используют критерий – минимум податливости [14], который является наиболее удобным и демонстративным критерием для разработки и тестирования методов.

Анализ результатов подтверждает эффективность инструмента *Bearing Load* для решения задач топологической оптимизации отдельных деталей. Полученная на основе этого инструмента топология (рис. 4, в) в наибольшей степени схожа с топологией, полученной на основе решения контактных задач (рис. 4, а, б). В то же время может быть рекомендовано при использовании данного инструмента (*Bearing Load*) итоговую топологию вблизи отверстия проушины принимать аналогичной той, которая получена на основе моделей с контактами (рис. 4, а, б, д).

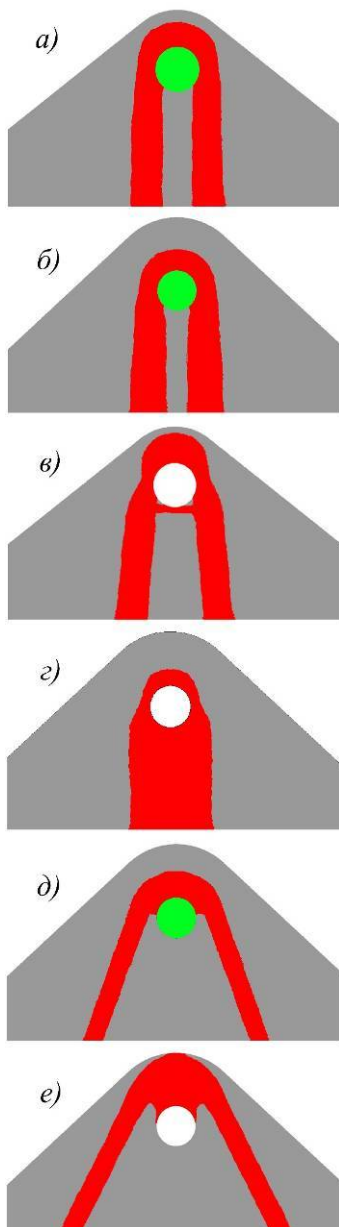


Рис. 4. Результаты топологической оптимизации (по двум критериям оптимальности), полученные на основе разных способов моделирования (приложения силы в отверстии) нагруженной одной силой проушины: а – поиск максимума жесткости с контактом типа *Frictionless* (ось–проушина без зазора), б – поиск максимума жесткости с контактом типа *No Separation*, в – поиск максимума жесткости с нагрузкой типа *Bearing Load*, г – поиск максимума жесткости с фиксацией в отверстии посредством *Remote Displacement* (тип *Deformable*), д – поиск минимума массы с контактом типа *No Separation*, е – поиск минимума массы с нагрузкой типа *Bearing Load*

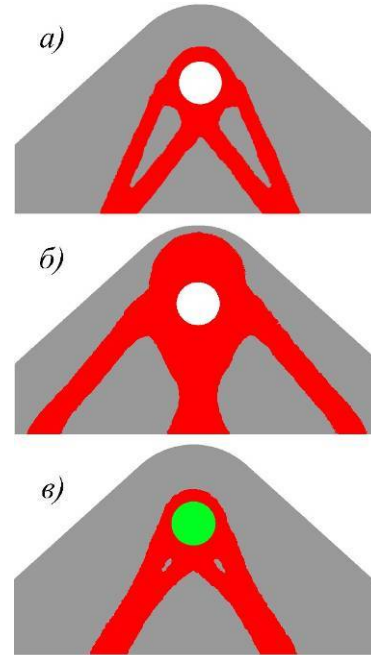


Рис. 5. Результаты оптимизации нагруженной несколькими силами проушины по двум критериям оптимальности: а – максимум жесткости с нагрузкой *Bearing Load*, б – минимум массы с нагрузкой *Bearing Load*, в – максимум жесткости с контактом типа *Frictionless* (ось–проушина без зазора)

Решение топологии, полученное на основе инструмента *Bearing Load* (рис. 5, а), и решение контактной задачи (рис. 5, в) по критерию максимум жесткости имеют заметное сходство. Их различие вызвано различиями применяемых средств: инструмент *Bearing Load* не учитывает жесткость оси и вероятно формирует решение топологии с учетом запаса на вариативность условий (запас по отношению к возможному разбросу параметров системы в реальности), в числе которых может быть, например, наличие значительного зазора в соединении «ось–проушина». Для рассмотренной задачи средняя продолжительность одной итерации с применением контактов (рис. 5, в) в 3 раза выше, чем у решения на основе инструмента *Bearing Load* (рис. 5, а).

#### 4. Метод оптимизации детали в два этапа

Моделирование нагрузки в отверстии проушины на основе инструмента *Bearing*

*Load* показало удовлетворительные результаты (рис. 4, 5), что позволяет рассматривать данный инструмент одним из наиболее перспективных для нагружения (в проушинах) оптимизируемых деталей.

Для топологической оптимизации отдельных деталей предлагается метод оптимизации в два этапа, в рамках которого задача решается в два шага (рис. 6). На первом этапе выполняется статический структурный анализ, в рамках которого определяются составляющие реакций во всех опорах для всех расчетных сочетаний нагрузок. На втором этапе проводится топологическая оптимизация на основе нового статического структурного анализа (или нескольких анализов), в котором из модели удалены все опоры, вместо которых приложены соответствующие им реакции, вычисленные на первом этапе.

Данный метод опирается на аксиому об освобождении от связей, в соответствии с которой любое несвободное тело можно освободить, заменяя силами реакций связей. Предлагается ко всем проушинам вместо опор прикладывать только силы (нагрузки типа *Bearing Load*), соответствующие реакциям в этих опорах. При условии корректности переноса сил достигается полное равновесие модели. Для обеспечения геометрической неизменяемости модели достаточно в одном из отверстий выбрать любую геометрию (например, одну из кромок) и для нее задать ограничение – *Remote Displacement* с деформируемым поведением, которое ограничит перемещение и вращение модели от любого остаточного дисбаланса (по реакции в этой опоре, которая должна быть близка к нулю, можно проконтролировать корректность переноса реакции из первого этапа). В работе [7] продемонстрировано (рис. 7) то, как в полностью сбалансированной модели топологической оптимизации (баланс достигнут для двух расчетных случаев) положение опор не оказывает существенного влияния на результаты оптимизации: шарнирно-неподвижная опора находится вдали от результирующей топологии (получена в программе *TopOpt-2D*), что указывает на то, что опора не воспринимает значительных нагру-

зок, но в то же время она необходима для достижения сходимости задачи.

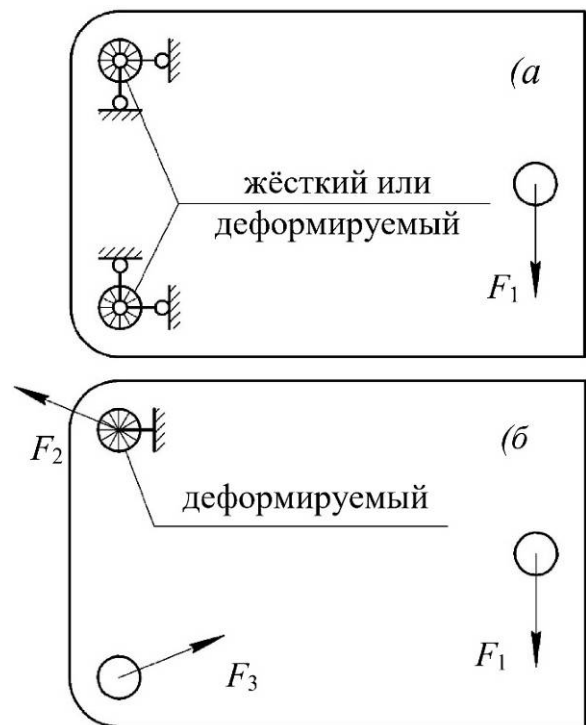


Рис. 6. Расчетные схемы к этапам двухэтапного метода оптимизации:  
 а – первый этап определения силовых факторов, б – второй этап топологической оптимизации

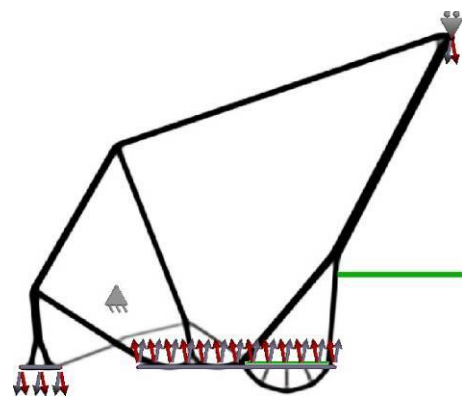


Рис. 7. Результат топологической оптимизации решения плавучего крана (шеерлега)

Метод оптимизации в два этапа позволяет сводить нелинейных задачи к линейным с минимальной потерей точности (влиянием на результаты топологической оптимизации), позволяя учитывать неограниченное количество расчетных случаев, обеспечивая возможность топологической оптимизации

по критерию минимум массы (с ограничениями по напряжениям).

Далее рассмотрено два примера решения задач топологической оптимизации. В первом примере рассмотрено влияние способа задания нагрузки на результирующую топологию. Во втором – разобрано применение метода оптимизации в два этапа на детали с несколькими проушинами.

### 5. Оптимизация звена манипулятора

В качестве первого примера разобрана задача, рассмотренная в работе [3], посвященная топологической оптимизации 2D-роботизированной руки (манипулятора) в условиях плоской деформации. Расчетная схема и соответствующий ей результат топологической оптимизации (на основе этого результата без существенных доработок изготовлена деталь для робота), полученный в этом исследовании, представлены на рис. 8. В исследовании даны размеры оптимизируемого звена манипулятора, проектируемой и непроектируемой областей, описаны результаты разбиения геометрии на конечные элементы, известна нагрузка, которую несет манипулятор. Оптимизация выполнена по критерию максимума жесткости при ограничении допустимой доли объема равной 40%. В статье [3] не в полной мере содержатся сведения о способах задания граничных условий (фиксации оптимизируемых объектов и приложения к ним внешних сил). Известно лишь, что с одной стороны в отверстии звено жестко закреплено (распространенный случай, для реализации которого не обязательно наличие отверстия), а к центру другого отверстия (свободный конец звена) приложена сосредоточенная масса, направление линии действия силы от веса которой, судя по результатам, перпендикулярно звену.

В рамках настоящего исследования выполнена топологическая оптимизация (по критерию минимум податливости) данной проблемы (рис. 8) [3] для тех же условий с использованием двух разных инструментов (для задания сил в отверстиях) – *Bearing Load* и *Remote Force* (поведение *Rigid*). На рис. 9 приведены результаты (представлены в еди-

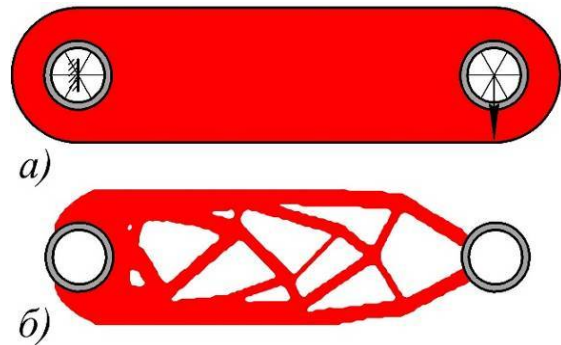


Рис. 8. Расчетная схема звена манипулятора и соответствующий ей результат топологической оптимизации, полученные в работе [3]: а – расчетная схема звена манипулятора, б – результат топологической оптимизации, полученный с учетом только начального момента времени (первый расчетный случай)

ном стиле с данными [3]) оптимизации для трех случаев: 1) учет одного случая действия силы (рис. 8, а), смоделированной посредством *Bearing Load*, 2) учет двух случаев действия силы в разные моменты времени (в одном и противоположном направлениях), смоделированной посредством *Bearing Load*, 3) учет одного случая действия силы, смоделированной посредством *Remote Force* (поведение *Rigid*).

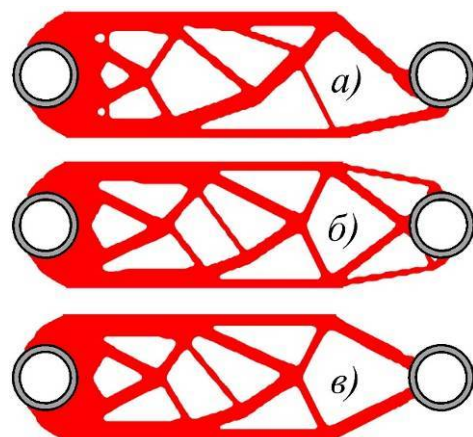


Рис. 9. Результаты топологической оптимизации звена робота: а – приложена одна сила (тип *Bearing Load*), направление которой неизменно, б – приложена пара сил (тип *Bearing Load*), противоположных по направлению и действующих в разные моменты времени, в – приложена одна сила (тип *Remote Force* с поведением *Rigid*), направление которой неизменно

Анализ результатов (рис. 9) обнаруживает очевидное сходство (в области проушины) топологии, полученной с использованием инструмента *Remote Force* (рис. 9, в), и представленного в работе [3] результата (рис. 8, б). Однако необходимо отметить, что такая топология (рис. 9, в) получена на основе допущения об абсолютной жесткости внутренней поверхности правого отверстия, что, как известно (рис. 2, в), не обеспечивает приемлемой точности результатов. Более рациональная топология, учитывающая податливость этой поверхности, полученная в рамках настоящего исследования, представлена на рис. 9, а, б. Данный пример наглядно демонстрирует то, как выбор инструмента может влиять на результат топологической оптимизации.

## 6. Оптимизация механической детали

Предыдущий пример наглядно продемонстрировал эффективность инструмента *Bearing Load* при моделировании нагрузки, приложенной к отверстию проушины детали. В следующем примере проиллюстрировано применение изложенного выше метода оптимизации детали в два этапа. За основу взята задача (рис. 10), рассмотренная в работе [2], где выполнена максимизация жесткости механической детали при ограничении допустимой доли объема (50% от исходной области) без ограничения по напряжениям. Здесь пара отверстий жестко закреплена, к двум другим – приложены равные силы  $F_1$ . Полученная в рамках этого исследования [2] топология вблизи проушин (рис. 10, б) имеет некоторое очевидное сходство с результатами, приведенными в работе [3] (рис. 8, б).

Поскольку практическая реализация жесткой заделки (без возможности вращения) по внутренним граням отверстий маловероятна, то рассмотрен вариант, при котором вместо жестких заделок в отверстиях заданы шарнирно-неподвижные опоры. Очевидно также, что ограничивающая перемещение одной детали пара шарнирно-неподвижных опор вероятно содержит одну избыточную связь, для выявления и исключения которой необходима дополнительная информация

(отсутствует в работе [2]) о контексте, в котором работает эта деталь.

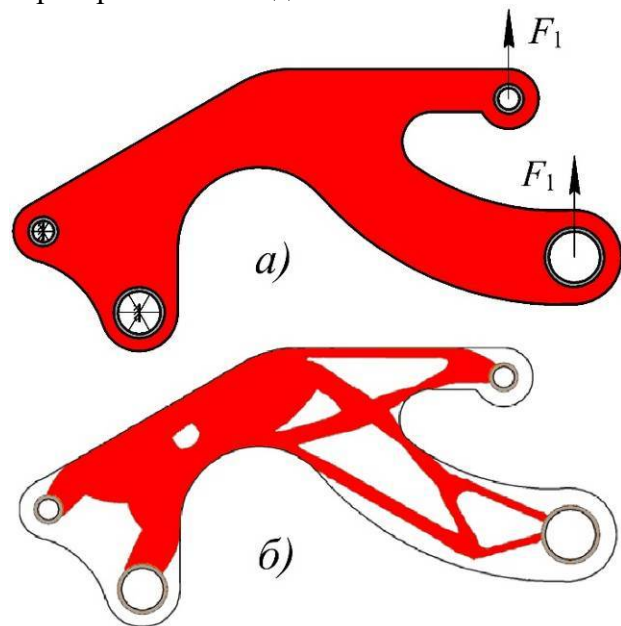


Рис. 10. Расчетная схема объекта и соответствующий ей результат топологической оптимизации, полученные в работе [2]: а – расчетная схема объекта, б – результат топологической оптимизации

При решении этой задачи в два этапа на первом этапе определены реакции в опорах ( $F_2=6,681 \cdot F_1$ ,  $F_3=8,550 \cdot F_1$ ) и направления их действия, на следующем – произведена замена этих опор на соответствующие реакции силы (рис. 11, а), смоделированные посредством инструмента *Bearing Load*. Хотя моделируемая деталь уравновешена приложенными к ней силами, даже незначительный дисбаланс этих сил делает ее подвижной при отсутствующим ограничениях перемещений. В данном примере геометрическая неизменяемость детали обеспечена посредством наложения формального ограничения (вводится для соблюдения формальных правил моделирования (устранения степеней свободы), а не для описания реального физического крепления) на перемещение геометрии (ограничивает перемещение и вращение по всем направлениям) в отверстиях с силой  $F_2$  с использованием инструмента *Remote Displacement* (тип *Deformable*), которое не влияет на результаты оптимизации, но только воспринимает упомянутый дисбаланс, ог-

раничивая любые перемещения детали. Ограничение не показано на рис. 11, а.

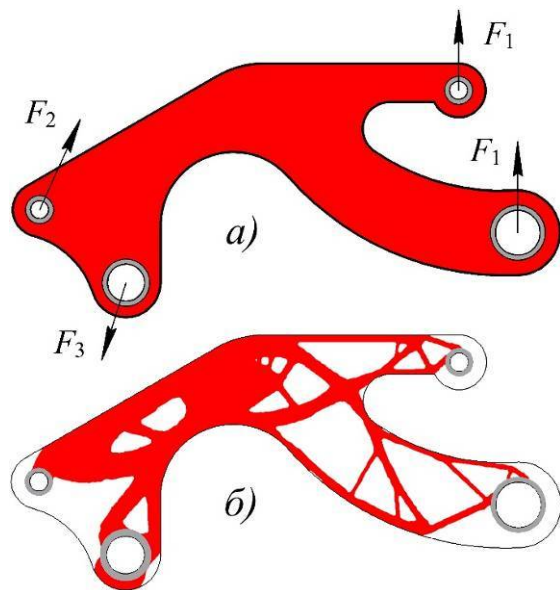


Рис. 11. Расчетная схема механической детали (для оптимизации в два этапа) и соответствующий ей результат топологической оптимизации: а – расчетная схема детали, б – результат топологической оптимизации

В соответствии с новой расчетной схемой (рис. 11, а) по критерию максимум жесткости механической детали при ограничении допустимой доли объема (50% от исходной области) без ограничения по напряжениям получена соответствующая топология (рис. 11, б), которая заметно отличается от результата, представленного в работе [2] (см. рис. 10, б), где наибольшее отличие имеется в проушинах, нагруженных нагрузкой на от-

рыв (место приложения силы  $F_3$ ) и изгиб проушины (в местах приложения сил  $F_1$ ).

## 7. Выводы

Корректное задание граничных условий при моделировании проушин является критически важным для получения достоверных результатов топологической оптимизации. Жёсткая фиксация и точечные нагрузки могут приводить к существенным погрешностям в распределении напряжений и, как следствие, к нерациональной топологии конструкции.

Инструмент *Bearing Load* в *ANSYS Workbench* продемонстрировал высокую эффективность при моделировании нагружения проушин, обеспечивая результаты, близкие к эталонным решениям на основе нелинейного контактного взаимодействия, при существенном снижении вычислительных затрат. Это делает его предпочтительным выбором для линейной постановки задач топологической оптимизации.

Предложенный двухэтапный метод оптимизации, основанный на замене связей эквивалентными силовыми воздействиями, позволяет эффективно решать задачи топологической оптимизации с учётом сложных граничных условий. Метод обеспечивает высокую точность при переходе от нелинейных к линейным моделям и поддерживает учёт множества расчётных случаев, что повышает адекватность оптимизационных решений. Этот метод может быть распространён в том числе и на задачи оптимизации объёмной геометрии.

## Список литературы

1. Peng P., Zheng W., Pan Y., Deng L., Zhu J., Tang L. Lightweight design of palletizing robot body parts based on Altair inspire // *Journal of Physics: Conference Series*. 2025. Vol. 3019. SP. 012014. DOI: 10.1088/1742-6596/3019/1/012014.
2. Cai S., Zhang W. Stress constrained topology optimization with free-form design domains // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2015. Vol. 289. P. 267–290. DOI: 10.1016/j.cma.2015.02.012.

## References

1. Peng P., Zheng W., Pan Y., Deng L., Zhu J., Tang L. Lightweight design of palletizing robot body parts based on Altair inspire. *Journal of Physics: Conference Series*, 2025, Vol. 3019, SP. 012014. DOI: 10.1088/1742-6596/3019/1/012014.
2. Cai S., Zhang W. Stress constrained topology optimization with free-form design domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, Vol. 289, pp. 267–290. DOI: 10.1016/j.cma.2015.02.012.

3. Wu C., Xu Y., Fang J., Sun G., Steven G.P., Li Q. Topology optimization for multi-component robotic arms under time-varying loads // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2025. Vol. 68. ANo. 188. DOI: 10.1007/s00158-025-04129-1.
4. Valentino J.M., Pramono A.S., Syaifudin A., Shalahuddin L., Perkasa M., Sasaki K. Development of an Automatic Coupler for Railway Vehicles: A Topology Optimization Approach with Numerical and Experimental Validation // *Automotive Experiences*. 2024. Vol. 7. P. 406–417. DOI: 10.31603/ae.11494.
5. Tang T., Wang L., Zhu M., Zhang H., Dong J., Yue W., et al. Topology Optimization: A Review for Structural Designs Under Statics Problems // *Materials*. 2024. Vol. 17. No. 23. No. 5970. DOI: 10.3390/ma17235970.
6. Гнездилов С.Г. Топологическая оптимизация конструкции грузового захвата с применением принципа минимума затрат усилий // *Научно-технический вестник Брянского государственного университета*. 2025. № 2. С. 124–134. DOI: 10.22281/2413-9920-2025-11-02-124-134.
7. Gnezdilov S.G., Shubin A.N. Structural optimization of non-rotating floating cranes: Analysis of classical designs and development of a dual-pontoon configuration // *Marine Structures*. 2025. Vol. 104. ANo. 103897. DOI: 10.1016/j.marstruc.2025.103897.
8. Гнездилов С.Г., Шубин А.Н. Топологическая оптимизация на примере стрелы башенного крана // *Механизация строительства*. 2017. Т. 78. №6. С. 40–43.
9. Hailu Shimels G., Dereje Engida W., Fakhruldin Mohd H. A comparative study on stress and compliance based structural topology optimization // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2017. Vol. 241. ANo. 012003. DOI: 10.1088/1757-899X/241/1/012003.
10. Akilan S., Janardhan Reddy K. Design improvement of steering knuckle through topology optimization for additive manufacturing // *Cogent Engineering*. 2024. Vol. 11. ANo. 2416487. DOI: 10.1080/23311916.2024.2416487.
11. Niu C., Zhang W., Gao T. Topology optimization of elastic contact problems with friction using efficient adjoint sensitivity
3. Wu C., Xu Y., Fang J., Sun G., Steven G.P., Li Q. Topology optimization for multi-component robotic arms under time-varying loads. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2025, Vol. 68, ANo. 188. DOI: 10.1007/s00158-025-04129-1.
4. Valentino J.M., Pramono A.S., Syaifudin A., Shalahuddin L., Perkasa M., Sasaki K. Development of an Automatic Coupler for Railway Vehicles: A Topology Optimization Approach with Numerical and Experimental Validation. *Automotive Experiences*, 2024, Vol. 7, pp. 406–417. DOI: 10.31603/ae.11494.
5. Tang T., Wang L., Zhu M., Zhang H., Dong J., Yue W., et al. Topology Optimization: A Review for Structural Designs Under Statics Problems. *Materials*, 2024, Vol. 17, No. 23, No. 5970. DOI: 10.3390/ma17235970.
6. Gnezdilov S.G. Topology optimization of a cargo gripper design using the minimum effort principle. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2025, No. 2, pp. 124–134. DOI: 10.22281/2413-9920-2025-11-02-124-134. (In Russian)
7. Gnezdilov S.G., Shubin A.N. Structural optimization of non-rotating floating cranes: Analysis of classical designs and development of a dual-pontoon configuration. *Marine Structures*, 2025, Vol. 104, ANo. 103897. DOI: 10.1016/j.marstruc.2025.103897.
8. Gnezdilov S.G., Shubin A.N. Topology optimization by the example of tower crane boom. *Mekhanizatsiya stroitelstva*, 2017, Vol. 78, No. 6, pp. 40–43. (In Russian)
9. Hailu Shimels G., Dereje Engida W., Fakhruldin Mohd H. A comparative study on stress and compliance based structural topology optimization. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2017, Vol. 241, ANo. 012003. DOI: 10.1088/1757-899X/241/1/012003.
10. Akilan S., Janardhan Reddy K. Design improvement of steering knuckle through topology optimization for additive manufacturing. *Cogent Engineering*, 2024, Vol. 11, ANo. 2416487. DOI: 10.1080/23311916.2024.2416487.
11. Niu C., Zhang W., Gao T. Topology optimization of elastic contact problems with friction using efficient adjoint sensitivity

- tion using efficient adjoint sensitivity analysis with load increment reduction // *Computers & Structures*. 2020. Vol. 238. No. 106296. DOI: 10.1016/j.compstruc.2020.106296
12. ГОСТ 33169-2022. Краны грузоподъемные. Металлические конструкции. Подтверждение несущей способности. Введ. 2023-03-01. М.: ФГБУ «РСТ», 2022. 58 с.
13. Türkmen H., Kirpik M.G., Sapmaz T., Yalçın F. Study on topology optimization of scraper conveyor chain // *The International Journal of Materials and Engineering Technology*. 2024. Vol. 7. No. 1. P. 48–53.
14. Curkovic P. Comparative Analysis of Topology Optimization Platforms for Additive Manufacturing of Robot Arms // *Designs*. 2024. Vol. 8. ANo. 98. DOI: 10.3390/designs8050098.
- † analysis with load increment reduction. *Computers & Structures*, 2020, Vol. 238, No. 106296. DOI: 10.1016/j.compstruc.2020.106296.
- † 12. GOST 33169-2022. *Cranes. Metal structures. Proof of competence*. Moscow, FGBU «RST», 2022. 58 p. (In Russian)
- † 13. Türkmen H., Kirpik M.G., Sapmaz T., Yalçın F. Study on topology optimization of scraper conveyor chain. *The International Journal of Materials and Engineering Technology*, 2024, Vol. 7, No. 1, pp. 48–53.
- † 14. Curkovic P. Comparative Analysis of Topology Optimization Platforms for Additive Manufacturing of Robot Arms. *Designs*, 2024, Vol. 8, ANo. 98. DOI: 10.3390/designs8050098.

УДК (UDC) 621.86

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ШИРИНЫ ГРУЗОНЕСУЩЕЙ  
ЛЕНТЫ ЛЕНТОЧНОГО КОНВЕЙЕРА НА ОСНОВЕ ДЕТАЛИЗАЦИИ  
ФАКТОРОВ ПЛОЩАДИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯIMPROVING THE ACCURACY OF DETERMINING THE WIDTH OF THE LOAD  
CARRIER CONVEYOR BELTS BASED ON DETAILING  
CROSS-SECTIONAL AREA FACTORSГончаров К.А., Григорьев П.А., Чалова М.Ю.  
Goncharov K.A., Grigorev P.A., Chalova M.Yu.Российский университет транспорта (Москва, Россия)  
Russian University of Transport (Moscow, Russian Federation)

**Аннотация.** Определение ширины грузонесущей ленты ленточного конвейера является одной из базовых проектных процедур, напрямую влияющих на дальнейший синтез геометрических параметров всего конвейера. При проведении данной процедуры инженеры вынуждены оперировать рядом вспомогательных коэффициентов, происхождение и принцип применения которых достаточно сложно верифицировать одновременно для различных сочетаний конструкций роlikоопор и свойств транспортируемых грузов, в частности, угла естественного откоса в покое и в движении. В настоящей статье проведен теоретический анализ указанных выше сочетаний и получен ряд значений коэффициента производительности применительно к выбору ширины ленты в зависимости от принимаемой модели положения ленты на роlikоопоре, учитывающей форму ленты – параболическую или трапецевидную, а также доли ширины ленты, контактирующие с центральным и боковыми роликками роlikоопоры. Приведено сопоставление полученных результатов с данными, предложенными в справочной литературе в качестве эталонных. Даны рекомендации по выбору коэффициента производительности при проектировании ленточного конвейера.

**Ключевые слова:** ленточный конвейер, ширина ленты, роlikоопора, угол естественного откоса.

**Дата получения статьи:** 22.03.2026  
**Дата принятия к публикации:** 04.06.2026  
**Дата публикации:** 25.06.2026

**Сведения об авторах:**

**Гончаров Кирилл Александрович** – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Наземные транспортно-технологические средства», Российский университет транспорта,  
e-mail: goncharov bgu@mail.ru.

ORCID: 0000-0002-5895-1162

**Григорьев Павел Александрович** – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой

**Abstract.** Determining the width of the load-bearing belt of a conveyor belt is one of the basic design procedures that directly affect the further synthesis of geometric parameters of the entire conveyor. During this procedure, engineers are forced to operate with a number of auxiliary coefficients, the origin and principle of application of which are quite difficult to verify simultaneously for various combinations of roller support structures and properties of transported goods, in particular, the angle of natural slope at rest and in motion. In this article, a theoretical analysis of the above combinations has been carried out and a number of performance coefficient values have been obtained in relation to the choice of the belt width, depending on the accepted model of the belt position on the roller support, taking into account the shape of the belt – parabolic or trapezoidal, as well as the proportions of the belt width in contact with the central and side rollers of the roller support. The comparison of the obtained results with the data proposed in the reference literature as reference ones is given. Recommendations are given on the choice of the performance coefficient when designing a conveyor belt.

**Keywords:** conveyor belt, belt width, roller support, natural slope angle.

**Date of manuscript reception:** 22.03.2026  
**Date of acceptance for publication:** 04.06.2026  
**Date of publication:** 25.06.2026

**Authors' information:**

**Kirill A. Goncharov** – Doctor of Technical Sciences, associate Professor, Professor of the Department of Land Transport and Technological Means, Russian University of Transport,  
e-mail: goncharov bgu@mail.ru.

ORCID: 0000-0002-5895-1162

**Pavel A. Grigorev** – Candidate of Technical Sciences, associate Professor, Head of the Department Land

«Наземные транспортно-технологические средства»,  
Российский университет транспорта,  
*e-mail: grigorievpavel1996@yandex.ru.*  
ORCID: 0000-0002-5409-6250

**Чалова Маргарита Юрьевна** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Наземные транспортно-технологические средства», Российский университет транспорта,  
*e-mail: margarita\_chalova@mail.ru.*

† Transport and Technological Means, Russian University of Transport, *e-mail: grigorievpavel1996@yandex.ru.*  
† ORCID: 0000-0002-5409-6250

† **Margarita Yu. Chalova** – Candidate of Technical Sciences, associate Professor, Associate Professor of the Department Land Transport and Technological Means, Russian University of Transport,  
† *e-mail: margarita\_chalova@mail.ru.*

## 1. Введение

Определение ширины грузонесущей ленты ленточного конвейера является ключевой проектной процедурой, напрямую влияющей на синтез геометрических параметров всего конвейера и связывающей математические модели регулирования производительности конвейеров с моделями их рабочих процессов. При расчете ширины ленты на основе существующих рекомендаций [1 – 5] инженеры вынуждены оперировать рядом вспомогательных коэффициентов (в частности, коэффициентом производительности), происхождение и принцип применения которых достаточно сложно верифицировать одновременно для различных сочетаний конструкций роликкоопор и свойств транспортируемых грузов, в частности, угла естественного откоса в покое и в движении.

В одном из ключевых трудов в области проектирования машин и оборудования непрерывного транспорта [1] коэффициент, связывающий эксплуатационную производительность конвейера и соответствующую ей минимально необходимую ширину ленты (указанный выше коэффициент производительности), носит наименование «коэффициент площади поперечного сечения». Данный коэффициент функционально зависит от геометрии поперечного сечения роликкоопоры грузовой ветви (угла наклона боковых роликов, долей распределения ширины ленты по центральному и боковым роликам опоры), а также степени подвижности груза, приводимой в итоге к углу естественного откоса груза в покое, определяемому в лабораторных условиях.

В работе [2] рассматриваемый коэффициент производительности называется «коэффициентом типа роликкоопор». И если в [1] угол откоса груза на движущейся ленте  $\varphi_1$

именуется «углом свободного расположения насыпного груза в поперечном сечении движущейся ленты» и принимается приближенно равным 35% угла естественного откоса груза в покое, то в работе [2] данный угол  $\varphi_1$  называется «расчетным углом откоса насыпного груза на ленте» и выбирается для всего диапазона грузов из трех значений: 15°, 20°, 25°. При этом в [1] выбор коэффициента производительности привязан к качественным категориям: легкая подвижность груза –  $\varphi_1 = 10^\circ$ , средняя подвижность груза –  $\varphi_1 = 15^\circ$ , малая подвижность груза –  $\varphi_1 = 20^\circ$ . Указанные величины угла  $\varphi_1$  расходятся со значениями, предлагаемыми в [2], что может вводить в заблуждение инженеров и ученых, работающих в данной области.

Работы [3, 4] являются примером проявления накопления системных ошибок при дальнейшей работе ученых на основе рассогласования данных, приведенных в работах [1, 2]. В [3] авторы следуют логике описания подвижности груза в соответствии с рекомендациями [1]. В [4] для тех же категорий подвижности указаны углы в соответствии с [2]. При этом в работе [3] наименование угла  $\varphi_1$  не указано, а в [4] наименование  $\varphi_1$  соответствует [2]. Так же стоит отметить, что в работе [3] для рассматриваемого коэффициента производительности авторы используют наименование «безразмерный угловой коэффициент площади сечения груза на ленте», а в работе [4] – «безразмерный коэффициент угловых параметров поперечного сечения груза на ленте». В источнике [5] для описываемого коэффициента авторы применили наименование «коэффициент производительности».

В работах [1 – 4] при определении коэффициента производительности принимается обязательное допущение, что лента в поперечном сечении роликкоопоры плотно прилегает к роликам и повторяет их контур – же-

лобчатый для трехроликовой опоры или треугольный для двухроликовой. Также в расчет коэффициента производительности вводится допущение, что на центральный ролик трехроликовой опоры приходится 38% полезной ширины ленты. При этом учет жесткости самой ленты в предположении ее точечного касания и неплотного прилегания к роликам не производится.

В работе [6] экспериментально показано, что контакт тяговой и грузонесущей лент друг с другом и с роликоопорами в поперечном сечении груза и ленты не происходит с плотным прилеганием по всей ширине роликов, а является точечным, образуя в продольном направлении полосы контакта, что вызывает ряд новых вопросов к допущениям, описанным выше.

На основе приведенных сведений можно констатировать, что в существующих принципах определения коэффициента производительности при выборе ширины ленты конвейера присутствует определенный хаос. При этом точность определения коэффициента зависит от принятых допущений, зачастую не учитывающих реальную картину положения ленты с грузом в поперечном сечении конвейера.

## 2. Цель исследования

Целью настоящего исследования является детализация факторов площади поперечного сечения ленточного конвейера с последующим повышением точности определения полезной ширины грузонесущей ленты. Детализация факторов площади будет проводиться на основе подробного разбора подходов к определению коэффициента производительности с учетом различных видов возможной формы ленты в поперечном сечении вследствие её жесткости.

## 3. Особенности проведения исследования

В качестве объекта исследования примем коэффициент производительности, определяемый как остаточное выражение площади поперечного сечения груза на ленте после устранения из него квадрата полезной шири-

ны ленты. В дальнейшей работе в целях унификации будем применять наименование данного коэффициента в соответствии с [5] – «коэффициент производительности».

Поперечное сечение груза на ленте в любой из рассматриваемых конфигураций роликоопор (при условии отсутствия их перекоса) принципиально состоит из двух частей:

- верхняя часть – треугольник, определяемый величиной угла свободного расположения насыпного груза в поперечном сечении движущейся ленты  $\varphi_1$ ;

- нижняя часть, принимающая три возможные формы в зависимости от конфигурации роликоопор:

- 1) трапеции – при желобчатой трехроликовой опоре;

- 2) треугольника – при двухроликовой опоре;

- 3) параболы – при любой опоре и достаточно жесткой ленте.

Угол  $\varphi_1$  будем определять в соответствии с рекомендациями [1] выражением

$$\varphi_1 \approx 0,35\varphi, \quad (1)$$

где  $\varphi$  – угол естественного откоса груза в покое.

В такой постановке решение задачи не будет связано с введенными в [1, 2] условностями в виде категорий подвижности груза, а также позволит избежать путаницы со значениями углов  $\varphi_1$ , присваиваемыми этим категориям.

Для форм трапеции и треугольника нижней части поперечного сечения целесообразно применить единый подход к описанию долей ширины ленты, приходящихся на каждый ролик опоры (рис. 1). Долю ширины ленты, приходящуюся на центральный ролик, обозначим в виде

$$\Delta_y = i \cdot b, \quad (2)$$

где  $b$  – искомая полезная ширина ленты;  $i$  – параметр долевой части.

Тогда на каждый боковой ролик трехроликовой желобчатой опоры приходится доля ширины ленты

$$\Delta_\delta = \left(\frac{1-i}{2}\right) \cdot b. \quad (3)$$

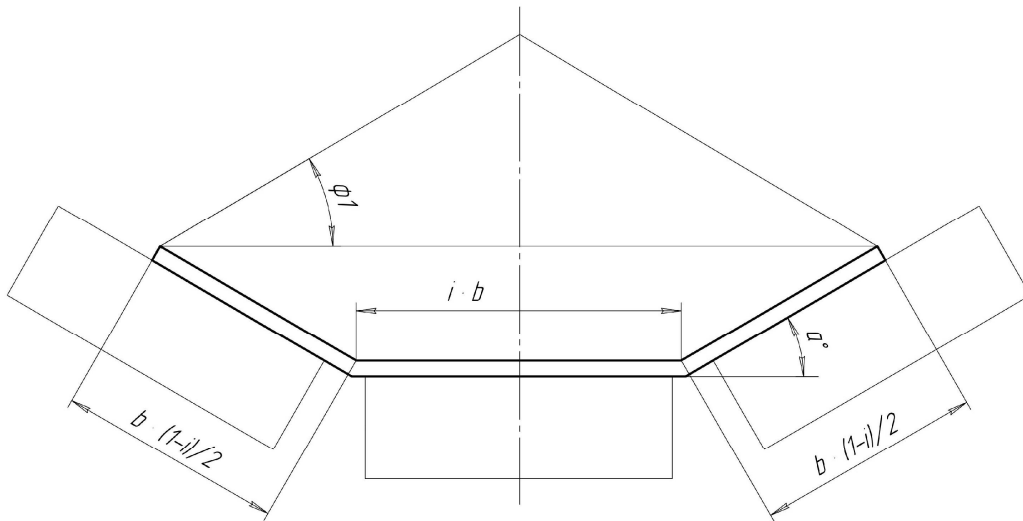


Рис. 1. Схема к определению коэффициента производительности для форм трапеции и треугольника нижней части сечения груза

Площадь нижней части (трапеции) сечения груза на ленте

$$S_{\text{мрпн}} = b^2 \cdot [2i + (1-i) \cdot \cos \alpha] \cdot \left(\frac{1-i}{4}\right) \sin \alpha, \quad (4)$$

где  $\alpha$  – угол наклона боковых роликов.

Площадь верхней части (треугольника) сечения груза на ленте

$$S_{\text{мрвх}} = b^2 \cdot [i + (1-i) \cdot \cos \alpha]^2 \cdot 0,25 \cdot \text{tg} \varphi_1. \quad (5)$$

Остаточное выражение суммарной площади верхней и нижней частей при устранении из него параметра  $b^2$  примет вид

$$k = [2i + (1-i) \cdot \cos \alpha] \cdot \left(\frac{1-i}{4}\right) \sin \alpha + [i + (1-i) \cdot \cos \alpha]^2 \cdot 0,25 \cdot \text{tg} \varphi_1. \quad (6)$$

Площадь поперечного сечения связана с массовой производительностью конвейера  $Q$  (т/ч) выражением

$$Q = 3600b^2 \cdot k \cdot v \cdot \rho, \quad (7)$$

где  $v$  – скорость движения ленты конвейера (м/с);  $\rho$  – насыпная плотность груза (т/м<sup>3</sup>).

Запишем зависимость (7) в виде

$$Q = b^2 \cdot K_n \cdot v \cdot \rho, \quad (8)$$

где  $K_n$  – исследуемый коэффициент производительности, определяемый умножением переводной константы 3600 на выражение (6)

$$K_n = \left( [2i + (1-i) \cos \alpha] \cdot \left(\frac{1-i}{4}\right) \sin \alpha + [i + (1-i) \cos \alpha]^2 \cdot 0,25 \text{tg} \varphi_1 \right) \cdot 3600. \quad (9)$$

Представление коэффициента  $K_n$  в виде зависимости (9) позволяет получить в результате массив значений данного коэффициента при применении различных значений параметра  $i$ , в отличие от строго установленного в [1–4] значения  $i = 0,44$ .

В случае представления контура нижней части сечения груза в виде параболы целесообразно применить дискретное решение задачи (рис. 2), разбив контур параболы на несколько частей (в настоящем исследовании – 10). Это позволит избежать громоздкости решения при нахождении длины дуги параболы и соответствующей площади с использованием определенного интеграла при изначально неопределенных пределах интегрирования (пределы меняются при изменении «глубины» параболы, так как реальная лента конечна, и её концевые точки меняют свои координаты при изменении величины прогиба).

Фактически, площадь нижней части сечения представляет собой совокупность площадей трапеций с изменяемым углом наклона одной боковой стороны при постоянном известном значении её длины, составляющим  $0,1b$ . При увеличении количества элементов разбиения точность решения будет повышаться. При этом степень пологости параболы фактически регулируется величиной угла наклона боковых роликов, к которой она привязана.

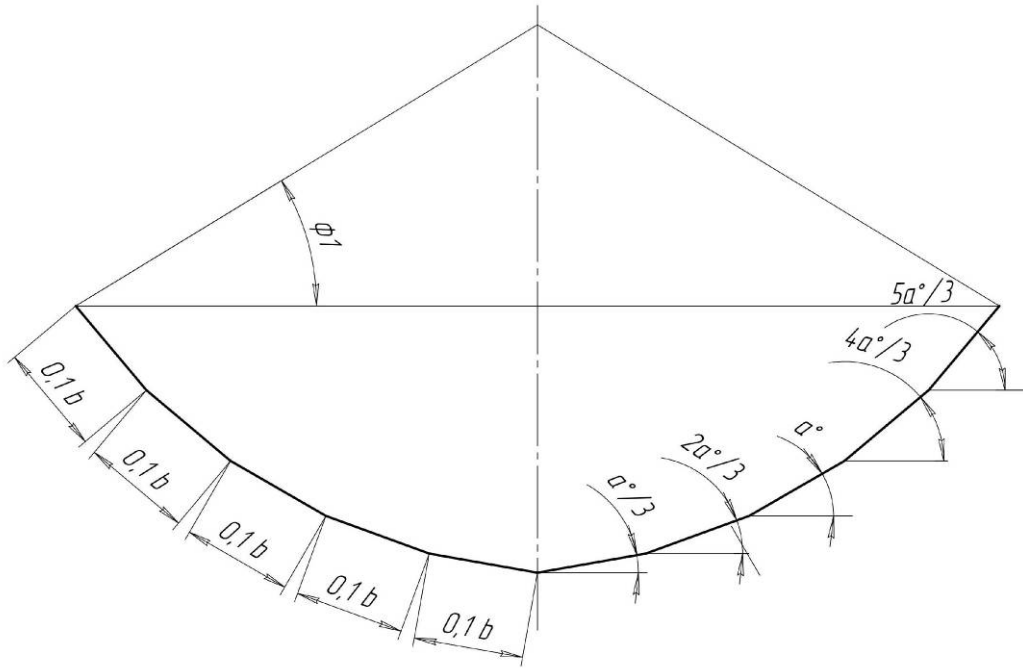


Рис. 2. Схема к определению коэффициента производительности для параболической формы нижней части сечения груза

Площадь нижней части сечения в рассматриваемом случае (рис. 2) определится выражением

$$\begin{aligned}
 S_{ниж} = & 0,01b^2 \left[ \sin\left(\frac{5\alpha}{3}\right) \cos\left(\frac{5\alpha}{3}\right) + \right. \\
 & + \left( 2 \sin\left(\frac{5\alpha}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\alpha}{3}\right) \right) \cos\left(\frac{4\alpha}{3}\right) + \\
 & + \left( 2 \sin\left(\frac{5\alpha}{3}\right) + 2 \sin\left(\frac{4\alpha}{3}\right) + \sin(\alpha) \right) \cos(\alpha) + \\
 & + \left( 2 \sin\left(\frac{5\alpha}{3}\right) + 2 \sin\left(\frac{4\alpha}{3}\right) + 2 \sin(\alpha) + \sin\left(\frac{2\alpha}{3}\right) \right) \cdot \\
 & \cdot \cos\left(\frac{2\alpha}{3}\right) + \left( 2 \sin\left(\frac{5\alpha}{3}\right) + 2 \sin\left(\frac{4\alpha}{3}\right) + 2 \sin(\alpha) + \right. \\
 & \left. + 2 \sin\left(\frac{2\alpha}{3}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \left. \right].
 \end{aligned}$$

Площадь верхней части сечения

$$\begin{aligned}
 S_{верх} = & 0,01b^2 \operatorname{tg} \varphi_1 \left[ \cos\left(\frac{5\alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\alpha}{3}\right) + \right. \\
 & \left. + \cos(\alpha) + \cos\left(\frac{2\alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \right]^2.
 \end{aligned}$$

Устраняя из данных выражений параметр  $b$ , а также умножая остаточное выражение на

константу 3600, получим зависимость для определения коэффициента  $K_n$

$$\begin{aligned}
 K_n = & 36 \left[ \sin\left(\frac{5\alpha}{3}\right) \cos\left(\frac{5\alpha}{3}\right) + \right. \\
 & + \left( 2 \sin\left(\frac{5\alpha}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\alpha}{3}\right) \right) \cos\left(\frac{4\alpha}{3}\right) + \\
 & + \left( 2 \sin\left(\frac{5\alpha}{3}\right) + 2 \sin\left(\frac{4\alpha}{3}\right) + \sin(\alpha) \right) \cos(\alpha) + \\
 & + \left( 2 \sin\left(\frac{5\alpha}{3}\right) + 2 \sin\left(\frac{4\alpha}{3}\right) + 2 \sin(\alpha) + \sin\left(\frac{2\alpha}{3}\right) \right) \cdot \\
 & \cdot \cos\left(\frac{2\alpha}{3}\right) + \left( 2 \sin\left(\frac{5\alpha}{3}\right) + 2 \sin\left(\frac{4\alpha}{3}\right) + 2 \sin(\alpha) + \right. \\
 & \left. + 2 \sin\left(\frac{2\alpha}{3}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \left. \right] + \\
 & + 36 \operatorname{tg} \varphi_1 \left[ \cos\left(\frac{5\alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\alpha}{3}\right) + \right. \\
 & \left. + \cos(\alpha) + \cos\left(\frac{2\alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \right]^2.
 \end{aligned}$$

При нахождении массива значений коэффициента  $K_n$  для разных конфигураций ниж-

ней части поперечного сечения груза введем следующие ограничения:

1) при трапецеидальном и треугольном контуре нижней части сечения угол наклона боковых роликов  $\alpha$  будем изменять дискретно с шагом  $3^\circ$  в общепринятом диапазоне от  $30^\circ$  до  $45^\circ$ ;

2) при трапецеидальном и треугольном контуре нижней части сечения используем два значения угла  $\varphi$  естественного откоса груза в покое:  $25^\circ$  и  $45^\circ$ ;

3) при параболическом контуре нижней части сечения угол наклона боковых роликов  $\alpha$  будем изменять дискретно с шагом  $5^\circ$  в диапазоне от  $10^\circ$  до  $60^\circ$ ;

4) при параболическом контуре нижней части сечения используем три значения угла  $\varphi$  естественного откоса груза в покое:  $25^\circ$ ,  $35^\circ$  и  $45^\circ$ .

#### 4. Анализ результатов исследования

На рис. 3 и 4 представлены зависимости коэффициента  $K_n$  при значениях угла естественного откоса груза в покое  $\varphi = 45^\circ$  и  $\varphi = 25^\circ$  для трехроликовой желобчатой опоры (частный случай – двухроликовая с треугольным профилем при значении параметра  $i = 0$ ).

На рис. 5 приведены зависимости коэффициента  $K_n$  для трехроликовой желобчатой опоры при форме нижнего контура поперечного сечения груза в виде параболы. Угол наклона боковых роликов  $\alpha$ , являющийся отсчетным при дискретном построении параболы, соответствует средним участкам боковых ветвей параболы и определяет их положение на боковых роликах.

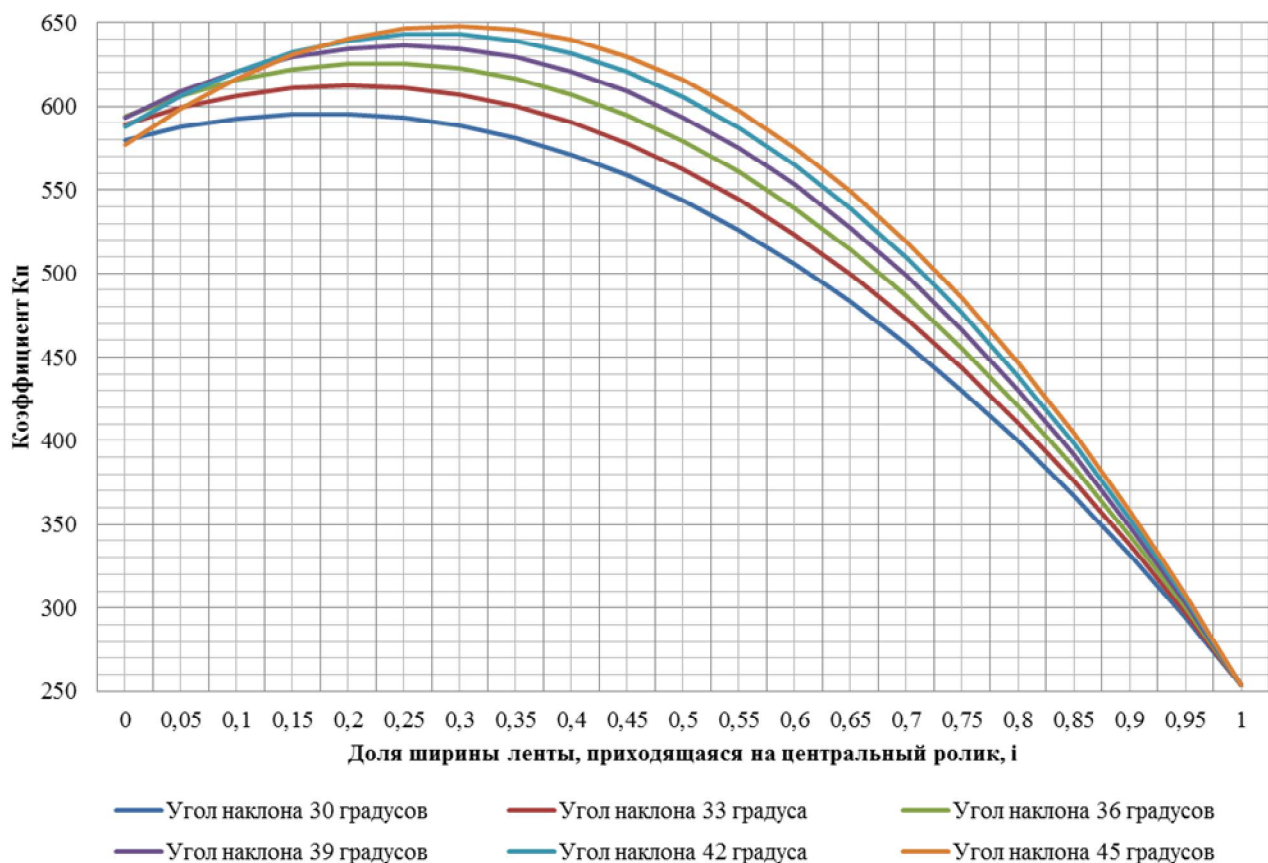


Рис. 3. Зависимости коэффициента  $K_n$  при значении угла естественного откоса груза в покое  $\varphi = 45^\circ$  для трехроликовой желобчатой опоры

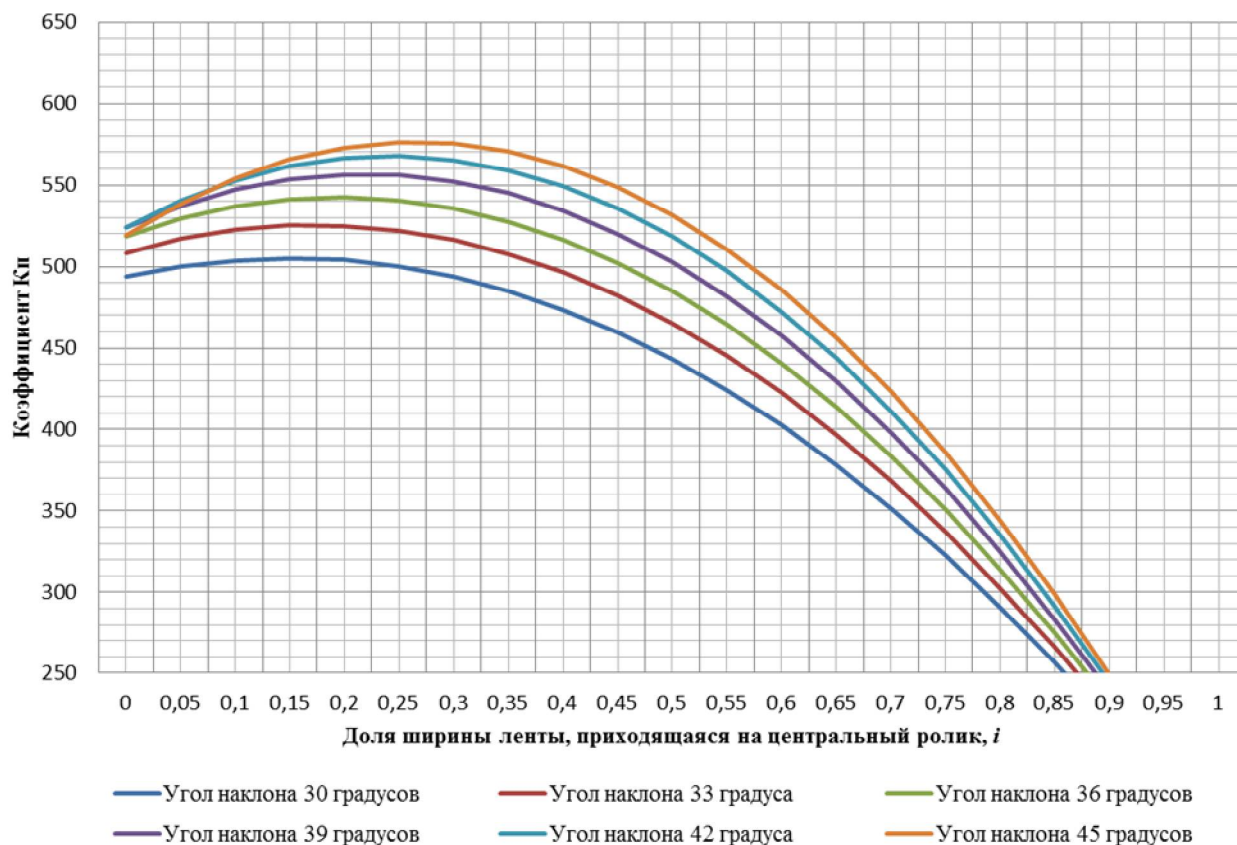


Рис. 4. Зависимости коэффициента  $K_n$  при значении угла естественного откоса груза в покое  $\varphi = 25^\circ$  для трехроликовой желобчатой опоры

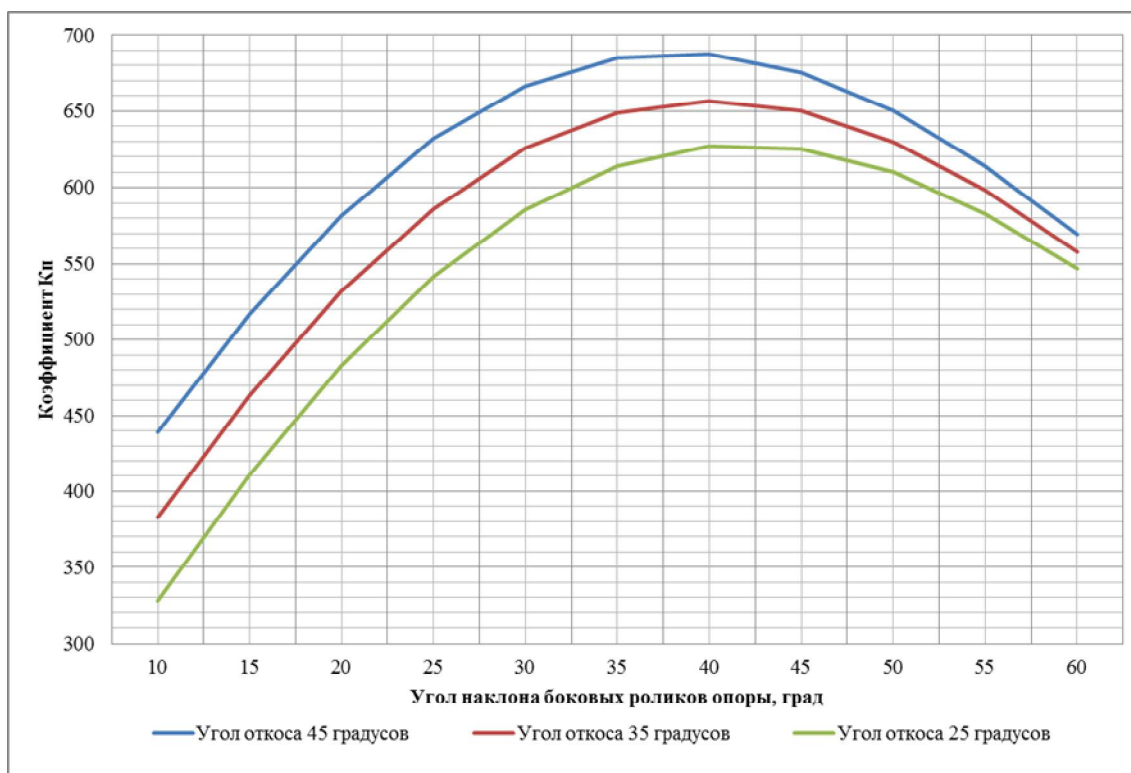


Рис. 5. Зависимости коэффициента  $K_n$  для трехроликовой желобчатой опоры

при форме нижнего контура поперечного сечения груза в виде параболы

На основе полученных зависимостей можно сделать следующие выводы:

1. При представлении контура нижней части сечения груза в виде трапеции и при оперировании значением угла естественного откоса груза в покое  $\varphi = 45^\circ$  (рис. 3) наилучшие значения коэффициента  $K_n$  с позиции минимизации полезной ширины ленты достигаются в случае соответствия доли указанной ширины ленты, приходящейся на центральный ролик трехроликовой опоры, диапазону значений 0,2...0,3. Меньшие значения диапазона соответствуют меньшим углам наклона боковых роликов ( $0,2 - 30^\circ, 33^\circ; 0,25 - 36^\circ, 39^\circ, 42^\circ; 0,3 - 45^\circ$ ). Полученные наилучшие значения  $i$  не соответствуют общепринятому подходу [1 – 4] с проектным применением значения  $i = 0,44$ .

2. При тех же условиях, что и в предыдущем выводе, и при оперировании значением угла естественного откоса груза в покое  $\varphi = 25^\circ$  (рис. 4) наилучшие значения коэффициента  $K_n$  с позиции минимизации полезной ширины ленты достигаются в случае соответствия доли ширины ленты, приходящейся на центральный ролик, диапазону значений 0,15...0,25. Меньшие значения диапазона соответствуют меньшим углам наклона боковых роликов ( $0,15 - 30^\circ, 33^\circ; 0,2 - 36^\circ, 39^\circ; 0,3 - 42^\circ, 45^\circ$ ), что предполагает еще большее отдаление значения  $i$  от величины  $i = 0,44$ .

3. При представлении контура нижней части сечения груза в виде параболы и при оперировании значениями угла естественного откоса груза в покое  $\varphi = 25^\circ, \varphi = 35^\circ$  и  $\varphi = 45^\circ$  (рисунок 5) наилучшие значения коэффициента  $K_n$  с позиции минимизации полезной ширины ленты достигаются для диапазона углов наклона боковых роликов  $30^\circ...45^\circ$ . Идеальный интервал угла наклона при таком подходе составляет  $35^\circ...40^\circ$ . В среднем, значения коэффициента  $K_n$ , вычисляемые с учетом параболической формы нижнего контура сечения, на 30 – 50 единиц выше, чем значения, соответствующие трапециевидному контуру при аналогичных условиях. Более точные рациональные значения углов наклона боковых роликов можно

установить, увеличив дискретность моделирования. Также, оперируя точкой отсчета угла  $\alpha$  (рис. 2) можно моделировать другие схемы расположения боковых роликов с целью синтеза в реальной конструкции конвейера параболического контура ленты в условиях контакта с тремя роликами.

## 5. Заключение

Физически наиболее спорным моментом при определении коэффициента  $K_n$  является возможность создания в трехроликовом трапециевидальном контуре формы ленты в виде параболы. Практически это достижимо за счет увеличения жесткости применяемой ленты. Однако стоит отметить, что расчет и выбор коэффициента  $K_n$  по форме трапециевидального контура за счет меньших значений позволяет получить дополнительный искусственный запас по полезной ширине ленты.

Одним из определяющих факторов поиска рациональной формы сечения груза, создающей максимальное значение коэффициента  $K_n$ , является экономическая целесообразность применения в конструкции одной роликоопоры роликов с разными геометрическими параметрами. С одной стороны, приобретается преимущество в стоимости ленты за счет снижения её необходимой ширины, а с другой – усложняется технология изготовления роликоопоры, увеличивается её стоимость и, как следствие, стоимость всего конвейера с учетом значительного количества роликоопор.

Результат исследования, описанного в настоящей статье, помимо практической целесообразности в виде синтеза зависимостей для определения коэффициента производительности и получения массивов их значений для прикладных расчетов открывает спектр направлений совершенствования конструкций роликоопор ленточных конвейеров с комбинированием в структуре одной опоры разных конфигураций роликов с целью получения рационального сечения ленты в каждой конкретной проектной ситуации в соответствии со свойствами транспортируемых грузов.

## Список литературы

1. Спиваковский А.О., Дьячков В.К. Транспортирующие машины. М.: Машиностроение, 1983. 487 с.
2. Конвейеры: справочник / Р.А. Волков, А.Н. Гнутов, В.К. Дьячков [и др.] / под общ. ред. Ю.А. Пертена. Л.: Машиностроение, 1984. 367 с.
3. Голутвин В.А., Анцев В.Ю., Сальников В.С., Анцев А.В. Выбор оптимальной ширины ленты ленточного конвейера // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. 2019. № 2. С. 128-135.
4. Голутвин В.А., Анцев В.Ю., Шадский А.В., Анцев А.В. Определение производительности ленточного конвейера с двухроликовыми опорами рабочей ветви // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. 2020. № 1. С. 183-193. DOI 10.46689/2218-5194-2020-1-1-183-193.
5. Современная теория ленточных конвейеров горных предприятий / В.И. Галкин, В.Г. Дмитриев, В.П. Дьяченко [и др.]. М.: Изд-во «Горная книга», Издательство Московского государственного горного университета, 2011. 545 с.
6. Гончаров К.А. Анализ взаимодействия грузонесущей и тяговой лент промежуточного привода ленточного конвейера // Научно-технический вестник Брянского государственного университета, 2019. №4. С.426–432. DOI: 10.22281/2413-9920-2019-05-04-426-432

## References

1. Spivakovskiy A.O., Dyachkov V.K. Transporting machines. Moscow, Mashinostroenie, 1983. 437 p. (In Russian)
2. Perten Yu.A., Volkov R.A., Gnutov A.N. Dyachkov V.K. *Konveyery*. Leningrad, Mashinostroenie, 1984. 367 p. (In Russian)
3. Golutvin V.A., Antsev V.Yu., Salnikov V.S., Antsev A.V. Choosing the optimal belt width of a belt conveyor. *Izvestiya Tulsogo gosudarstvennogo universiteta. Nauki o Zemle*, 2019, No.2, pp.128-135. (In Russian)
4. Golutvin V.A., Antsev V.Yu., Shadsky G.V., Antsev A.V. Productivity determination of the belt conveyor with two-roller supports of the working branch. *Izvestiya Tulsogo gosudarstvennogo universiteta. Nauki o Zemle*, 2020, No.1, pp.183-193. (In Russian)
5. Galkin V.I., Dmitriev V.G., Dyachenko V.P. Actual theory of belt conveyors in mining. Moscow, MSMU publishing company, 2005. 543 p. (In Russian)
6. Goncharov K.A. Analysis of tractive and carrying belts interaction of intermediate drive of belt conveyor. *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2019, No.4, pp. 426-432. DOI: 10.22281/2413-9920-2019-05-04-426-432 (In Russian)

УДК (UDC) 620.193.1:621.165

МЕХАНИЧЕСКИЕ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ТРЕХФАЗНОМ  
ЭРОЗИОННОМ ИЗНАШИВАНИИMECHANICAL AND HYDRODYNAMIC PROCESSES IN THREE-PHASE EROSIIVE  
WEARЛагереv А.В.  
Lagerev A.V.Российский университет транспорта (Москва, Россия)  
Russian University of Transport (Moscow, Russian Federation)

**Аннотация.** В процессе эксплуатации различного ответственного технологического оборудования, в частности, энергетического (паровых и влажнопаровых турбин, трубопроводов влажного пара и др.) наблюдается эрозионно-ударное нагружение конструктивных элементов технологического оборудования со стороны содержащихся в газовых или воздушных потоках рабочего тела полидисперсных капель влаги и твердых частиц загрязнений и примесей. Это обуславливает трехфазный характер процесса эрозионного изнашивания поверхности конструктивных элементов оборудования. Большинство загрязнений и примесей являются гидрофильными, вследствие чего относительно крупные твердые частицы обволакиваются влагой с образованием жидкой пленки на их поверхности, а более мелкие взвешены в объеме капель. Это делает невозможным простой перенос на условия трехфазного эрозионного изнашивания результатов исследований и методов прогнозирования либо только каплеударного, либо только газообразного эрозионного изнашивания. В статье представлены математические модели механических и гидродинамических мипроцессов, протекающих во время соударения композитной капли влаги, т.е. капли с находящейся внутри твердой частицей, с поверхностью конструктивного элемента. Явление соударения рассмотрено в виде двух последовательных стадий. Первая, начальная стадия включает взаимодействие поверхности конструктивного элемента с жидкой фазой композитной капли. На основе одномерной лучевой теории рассмотрено образование и распространение системы отраженных и преломленных волн давления и напряжения в элементе, жидкости и частице, получены количественные зависимости для оценки характерных параметров процессов – длительности, давлений, скорости движения. Вторая, заключительная стадия включает взаимодействие поверхности конструктивного элемента с твердой частицей эродента. Построены система уравнения движения частицы в процессе ее внедрения и отскока с учетом действия жидкости за тыльной стороной твердой частицы. Также предложена зависимость для количественной расчетной оценки величины эрозионно-усталостного повреждения поверхности конструктивного элемента от удара единичной композитной капли.

**Abstract.** During the operation of various critical technological equipment, in particular, energy (steam and wet steam turbines, wet steam pipelines, etc.), erosion loading of the structural elements of technological equipment is observed from the side of polydisperse droplets of moisture and solid particles of pollutants and impurities contained in the gas or air streams of the working fluid. This determines the three-phase nature of the process of erosive wear of the surface of the structural elements of the equipment. Most pollutants and impurities are hydrophilic, as a result of which relatively large solid particles are enveloped in moisture to form a liquid film on their surface, while smaller ones are suspended in the volume of droplets. This makes it impossible to easily transfer to the conditions of three-phase erosive wear the results of research and methods of forecasting either only drop-impact or only gas-abrasive erosive wear. The article presents mathematical models of mechanical and hydrodynamic processes occurring during the impact of a composite drop of moisture, i.e. droplets with a solid particle inside, with the surface of a structural element. The impact phenomenon is considered in the form of two consecutive stages. The first, initial stage involves the interaction of the surface of the structural element with the liquid phase of the composite droplet. Based on the one-dimensional ray theory, the formation and propagation of a system of reflected and refracted pressure and stress waves in an element, liquid, and particle are considered, and quantitative dependences are obtained to evaluate the characteristic parameters of processes - duration, pressures, and velocity. The second and final stage involves the interaction of the surface of the structural element with a solid eroding particle. A system of equations of motion of a particle in the process of its insertion and rebound is constructed, taking into account the action of a liquid behind the back of a solid particle. A dependence is also proposed for the quantitative calculation of the value of the erosion and fatigue damage to the microplate of the surface of the structural element from the impact of a single composite drop.

**Ключевые слова:** эрозия, жидкие капли, твердые примеси, объемная волна давления, поле давлений.

**Keywords:** erosion, liquid droplets, solid impurities, volumetric pressure wave, pressure field.

**Дата получения статьи:** 05.03.2026  
**Дата принятия к публикации:** 05.06.2026  
**Дата публикации:** 25.06.2026

**Date of manuscript reception:** 05.03.2026  
**Date of acceptance for publication:** 05.06.2026  
**Date of publication:** 25.06.2026

**Сведения об авторе:**

**Лагерев Александр Валерьевич** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Наземные транспортно-технологические средства», ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта», e-mail: [bsu-avl@yandex.ru](mailto:bsu-avl@yandex.ru).  
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0380-5456>

**Author' information:**

**Alexander V. Lagerev** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of Department «Ground transportation and technological facilities» at Russian University of Transport, e-mail: [bsu-avl@yandex.ru](mailto:bsu-avl@yandex.ru).  
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0380-5456>

## 1. Введение

Отличительной чертой эрозионно-ударного нагружения конструктивных элементов технологического оборудования, которые взаимодействуют с газовыми или воздушными потоками рабочего тела, содержащими относительно небольшое количество влаги в виде полидисперсных капель и твердых частиц загрязнений и примесей, является трехфазный характер процесса эрозионного изнашивания.

Подобные условия характерны для энергетического оборудования, в частности, для проточных частей влажнопаровых турбинных ступеней конденсационных и теплофикационных турбин ТЭС, влажнопаровых турбин ГеоТЭС, трубопроводов влажного пара [1, 2]. В этом случае в потоке рабочего тела имеет место тесный контакт твердых частиц (продуктов коррозии и эрозии, частиц отложений, нерастворимых примесей, прошедших систему сепарации и др.) с жидкой фазой вследствие столкновения с каплями влаги и конденсации переохлажденного влажного пара. Преобладающее большинство примесей по классификации [3] являются гидрофильными, хорошо смачиваемыми водой. В условиях движения в проточной части влажнопаровых турбинных ступеней следует ожидать, что относительно крупные твердые частицы обволакиваются влагой с образованием жидкой пленки на их поверхности, а более мелкие взвешены в объеме капель. Указанная особенность делает невозможным простой перенос на условия турбинных ступеней результатов исследований

и методов прогнозирования газо-абразивного эрозионного изнашивания, достаточно широко развитых применительно к износу проточных частей газовых турбин, компрессоров и ступеней перегретого пара паровых турбин [4 - 6]. Возможное взаимовлияние жидкой и твердой фаз на эрозионное изнашивание должно учитываться при создании феноменологической вероятностной модели механизма эрозионного изнашивания и оценки параметра ударного микронагружения поверхности конструктивного элемента с учетом влияния на него объема связанной с твердой частицей жидкости.

## 2. Начальная стадия соударения композитной капли

Обобщенная модель эрозионно-усталостного повреждения материалов в условиях трехфазной эрозии поверхности элементов конструкций при ударном воздействии газового или парового потока рабочего тела, содержащего твердые частицы примесей в объеме капель влаги или иной жидкости, может быть построена на основе рассмотрения гидродинамических и механических явлений при соударении с поверхностью упругого полупространства твердой частицы эродента размером  $d_p$ , находящейся в объеме жидкой частицы размера  $d_d > d_p$ .

В первом приближении будем рассматривать сферическую каплю радиусом  $r_d$ , содержащую одну сферическую твердую частицу диаметром  $d_p$ . Центр тяжести частицы располагается на оси симметрии капли, параллельной вектору её скорости. Таким об-

разом, в данной статье рассматривается одномерная модель процесса соударения композитной капли с твердой поверхностью, т.е. задача оценки максимальных величин ударного давления и амплитуды переменных эрозионно-ударных напряжений вследствие одиночного акта нагружения  $\sigma_e$  решается в одномерной постановке.

В начальный момент соударения в объеме капли возникает присоединенная к пятну контакта первичная волна сжатия. Её фронт распространяется по направлению к поверхности частицы. В интервале времени до достижения волной сжатия поверхности частицы гидродинамические процессы в объеме жидкости полностью аналогичны удару капли без частицы [7]. От твердой поверхности частицы первичная волна отражается и образуется вторичная волна сжатия, которая распространяется назад к поверхности соударения. Она достигает её через промежуток времени

$$\Delta\tau_1 = \frac{2x_0}{C' + v'_n}, \quad (1)$$

где  $x_0 = r_d - d_p / 2$  - толщина слоя жидкости перед фронтом твердой частицы;  $C'$  - скорость волны давления в жидкости;  $v'_n$  - нормальная составляющая скорости соударения капли.

Затем эта вторичная волна сжатия испытывает новое отражение и в виде волны сжатия опять движется по направлению к частице. Далее процесс повторяется. По мере продвижения частицы к поверхности конструктивного элемента интервал времени между  $(k-1)$ -м и  $k$ -м подходами отраженных волн к пятну контакта уменьшается, причем с увеличением скорости удара это проявляется более интенсивно. Промежуток времени сокращается согласно следующей зависимости:

$$\Delta\tau_k = \Delta\tau_{k-1} \frac{C' - v'_n}{C' + v'_n} = \Delta\tau_1 \left( \frac{C' - v'_n}{C' + v'_n} \right)^{k-1}. \quad (2)$$

Первичная волна сжатия на поверхности частицы наряду с отражением также испытывает преломление с образованием вторичной преломленной волны напряжения сжатия. Волна распространяется вглубь частицы, испытывает отражение от тыльной по-

верхности частицы и в виде волны напряжения растяжения возвращается к передней поверхности, испытывает отражение с преобразованием в волну сжатия и т.д. Преломленная на тыльной поверхности частицы волна сжатия движется к поверхности капли, испытывает отражение и в виде волны растяжения возвращается назад. Таким образом, в объеме композитной капли формируется в результате многочисленных актов отражения-преломления на границах трех фаз сложная система первичных и вторичных волн сжатия и растяжения, имеющих различные скорости движения в жидкой и твердой фазах.

Лучевая схема перемещения во времени фронтов волн сжатия и растяжения в капле и в частице приведена на рис. 1.

Наличие в объеме капли нескольких поверхностей раздела разнородных материалов приводит к появлению значительного числа вторичных отраженных и преломленных волн сжатия и растяжения, движение и суперпозиция которых определяет изменение во времени поля давлений в жидкости, поля напряжений в частице и поверхностного давления в пределах пятна контакта. На рис. 2 представлены результаты количественного анализа указанных величин при ударе со скоростью 300 м/с капли диаметром 400 мкм, содержащей расположенную в центре частицу окаины диаметром 100 и 300 мкм. При расчете был использован алгоритм, основанный на представлении лучевых схем движения волн напряжений в слоистом материале ориентированными графами [8]. На этом же рисунке также представлены результаты расчета поля давлений в жидкости и поверхностного давления при ударе капли без частицы.

В промежутке времени  $0 \dots \Delta\tau_1$  начальная фаза процесса соударения капли с частицей аналогична начальной фазе соударения капли без частицы. Однако затем появляются принципиальные различия. В момент  $\Delta\tau_1$  на эпюре изменения во времени поверхностного давления наблюдается вторичный пик  $P_{imp,2}$  значительной величины. Его значение зависит от расстояния  $x_0$  - расстояния между

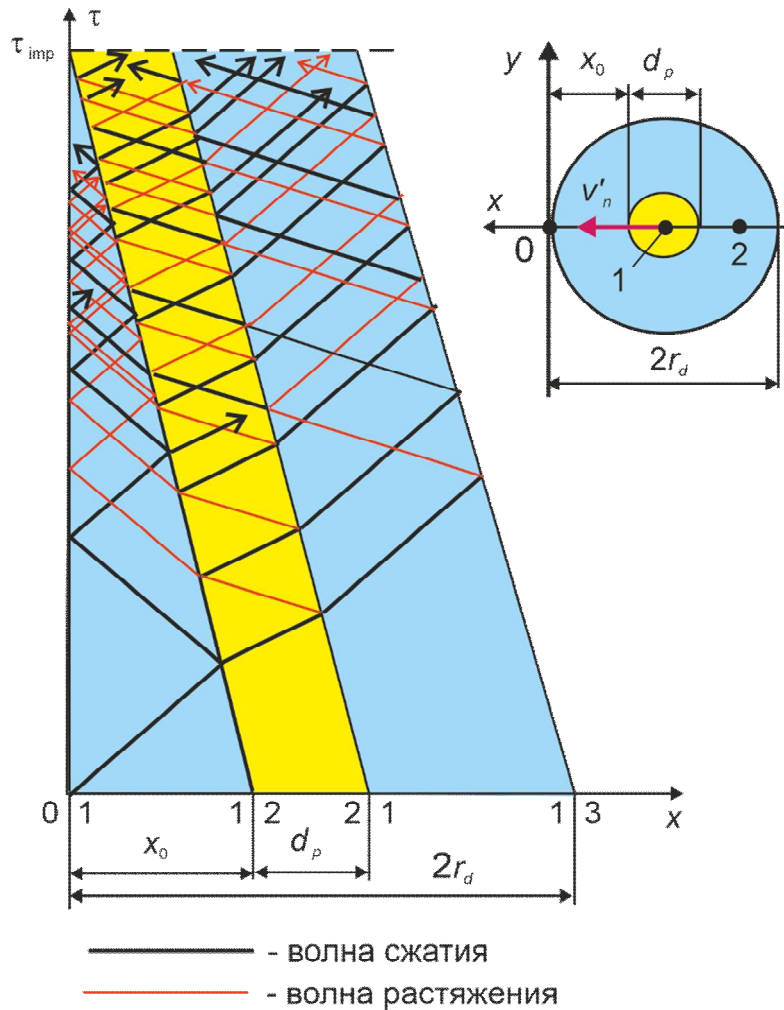


Рис. 1. Лучевая схема движения фронтов волн вдоль оси  $y = 0$  в капле и частице

частицей и поверхностью полупространства в начальный момент соударения и может быть оценено по зависимости

$$P_{imp,2} = P_{imp} \left\{ \exp \left[ - \frac{6x_0}{r_d \left( \frac{v'_n}{C'} + 1 \right)} \right] + \xi_{12}^{rl} (1 + \xi_{10}^{rl}) \right\}, \quad (3)$$

где  $P_{imp}$  - гидродинамическое давление при ударе капли [5, 9];  $\xi_{01}^{rl}$  - коэффициент отражения на границе раздела «поверхность-капля»;  $\xi_{12}^{rl}$  - коэффициент отражения на границе раздела «капля-частица».

Как следует из выражения (3), существует интервал  $x_0 \in (0; x_{0,cr})$ , для которого наблюдается превышение величиной вторичного пика давления  $P_{imp,2}$ , подсчитанного по параметрам соударения капли без частицы.

Пороговое значение  $x_{0,cr}$  можно найти из выражения (3) при условии  $P_{imp,2} = P_{imp}$ :

$$x_{0,cr} = - \frac{r_d}{6} \left( \frac{v'_n}{C'} + 1 \right) \ln \left[ 1 - \xi_{12}^{rl} (1 + \xi_{10}^{rl}) \right]. \quad (4)$$

Относительная доля от общего числа соударений одинаковых капель влаги с превышением давлением  $P_{imp,2}$  давления  $P_{imp}$  в предположении о равной вероятности нахождения частицы в произвольной точке объема капли с плотностью вероятности

$$p(x_0) = (2r_d - d_p)^{-1} \quad (5)$$

оценивается величиной

$$\bar{n} = \frac{\left( \frac{v'_n}{C'} + 1 \right) \ln \left[ 1 - \xi_{12}^{rl} (1 + \xi_{10}^{rl}) \right]}{6 \left( \frac{d_p}{r_d} - 2 \right)} \quad (6)$$

и составляет примерно 30 ... 50 %.

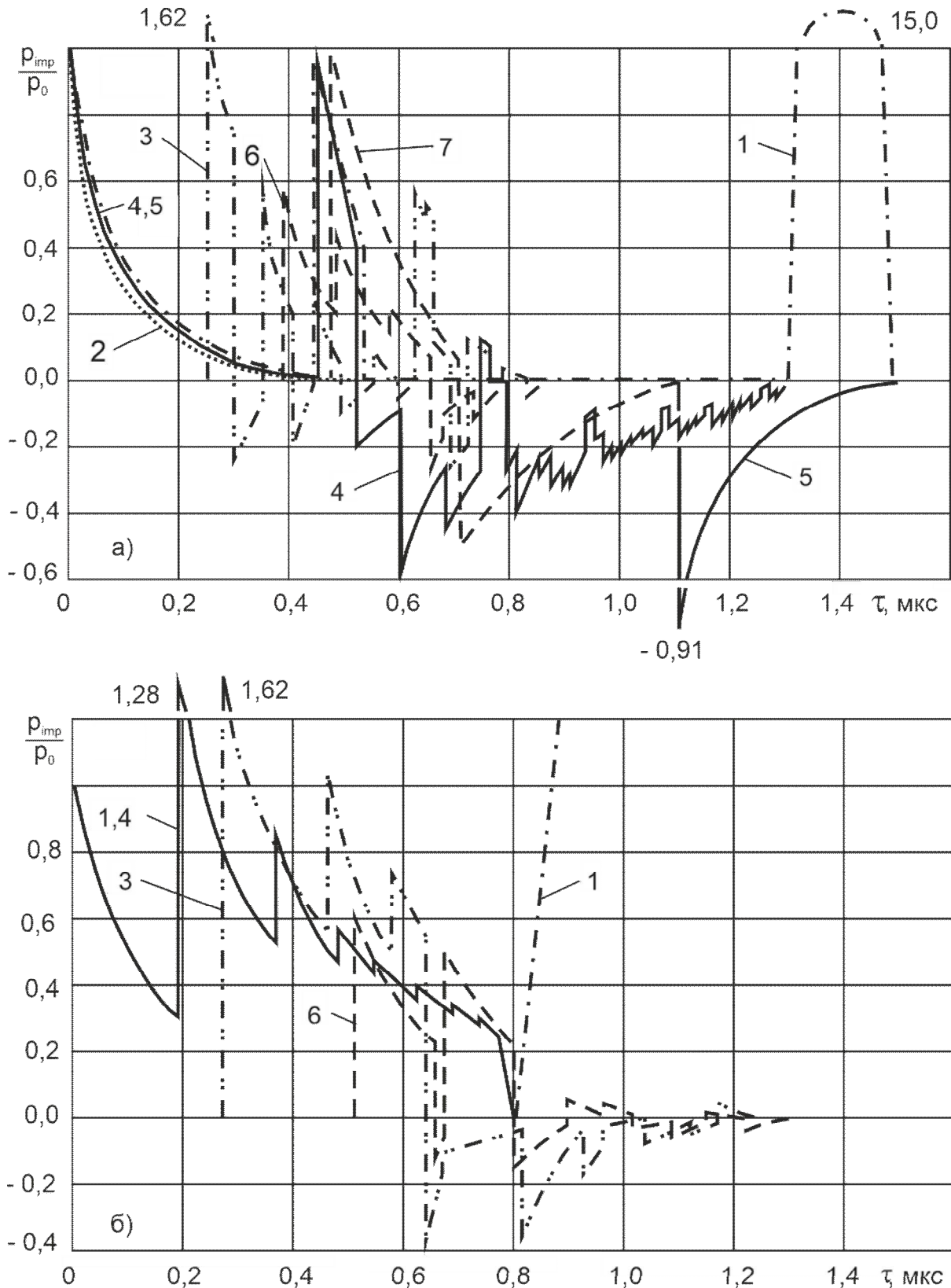


Рис. 2. Начальная стадия соударения капли диаметром 400 мкм со скоростью 300 м/с, содержащей частицу окалины : а – диаметром 100 мкм; б – диаметром 300 мкм (1, 2, 4, 5 – давление в центре пятна контакта; 3 – напряжение в точке 1 частицы; 6, 7 - давление в точке 2 жидкости; 1, 3, 4, 6 – капля с частицей; 2, 5, 7 – капля без частицы)

В зависимости от величины  $x_0$  могут наблюдаться дополнительные пики поверхностного давления, связанные с подходом к поверхности соударения вторичных отраженных от частицы волн сжатия. В частности, на рис. 2 при  $\tau \approx 0,75$  мкс наблюдается ещё один такой пик величиной  $p_{imp,2} / p_{imp} = 0,14$ . С уменьшением  $x_0$  число пиков, а также их высота будут возрастать, так как сокращаются промежутки времени между последующими подходами отраженных волн и соответственно увеличивается число накладывающихся друг на друга волн сжатия. Такая эпюра изменения во времени поверхностного давления характерна для частиц, поверхность которых покрыта пленкой жидкости малой толщины. Она иллюстрируется рис. 2, б для соотношения размеров  $d_p / 2r_d$ . Верхнюю оценку максимально возможного повышения поверхностного давления по сравнению с величиной  $p_{imp}$  можно сделать при рассмотрении предельного перехода  $x_0 \rightarrow 0$

$$\frac{(p_{imp,2})_m}{p_{imp}} = 1 + \frac{1 + \frac{\xi_{10}^{rl}}{\xi_{12}^{rl}}}{1 - \frac{\xi_{12}^{rl}}{\xi_{10}^{rl}}}. \quad (7)$$

Величина  $(p_{imp,2})_m$  зависит от механических свойств взаимодействующих материалов и, как правило, лежит в интервале (4 ... 7)  $p_{imp}$ .

Давление в объеме жидкости, заключенном между поверхностью соударения и частицей, подвержено высокочастотным колебаниям. Это связано с воздействием волн растяжения, образованных при преломлении в жидкости движущихся внутри частицы волн напряжения растяжения. Вблизи поверхности соударения возникает зона положительных напряжений. Величина их намного превышает предел прочности воды на растяжение, и внутри зоны возможно нарушение сплошности объема жидкости. Время образования зоны заметно (по данным рис. 29,а примерно в 2 раза) сокращается по сравнению с ударом капли без частицы. Это обстоятельство, а также периодическое по-

вышение давления в моменты прохода отраженных от частицы волн сжатия позволяет предполагать интенсификацию кавитационных процессов в капле из-за наличия в ней частицы. Однако при малой толщине слоя жидкости на передней поверхности частицы  $d_p / 2r_d \rightarrow 1$  (т.е. при малом  $x_0$ ) зона положительных напряжений не возникает, так как сформировавшаяся в частице волна растяжения не успевает вернуться в объем жидкости до момента соприкосновения частицы с поверхностью полупространства. В этом случае отсутствуют условия для возникновения кавитационных процессов. Оценка минимального значения  $d_p / 2r_d$ , при котором отсутствует зона растяжения, может быть выполнена по зависимости

$$\left( \frac{d_p}{2r_d} \right)_{\min} = \left[ 4 \left( \frac{v'_n}{C'} + 1 \right) \frac{v'_n}{C_{1p}} + 1 \right]^{-1}, \quad (8)$$

где  $C_{1p}$  - скорость продольной волны в частице.

Практически  $(d_p / 2r_d)_{\min} \sim 0,65 \dots 0,95$ , причем оно возрастает с уменьшением скорости соударения  $v'_n$  и увеличением скорости продольной волны в частице  $C_{1p}$ .

Поле давлений в капле за частицей также переменено во времени. В нем могут возникать зоны положительных напряжений, превышающих предел прочности воды на растяжение. Это не скажется на повреждении поверхности соударения, однако несомненно влияет на процесс разбрызгивания капли.

В частице возникает знакопеременное во времени напряженное состояние с коэффициентом асимметрии  $r < -1$ . Максимальные по абсолютной величине напряжения (отрицательные) наблюдаются при первом прохождении преломленной на поверхности частицы волны напряжения сжатия. Напряжение сжатия в  $\xi_{12}^{rr}$  раз превышает давление  $p_{imp}$  (где  $\xi_{12}^{rr}$  - коэффициент отражения на границе раздела «капля-частица»). Напряжение растяжения заметно ниже, однако также значительно по величине. Как напряжения сжатия, так и растяжения могут оказаться достаточными для разрушения частицы на

несколько более мелких осколков. В первую очередь это относится к продуктам коррозии и частицам отложений, обладающих низкими пластическими свойствами при возможном наличии в них микротрещин.

### 3. Заключительная стадия соударения твердой частицы эродента

Заключительная фаза соударения - взаимодействие частицы с поверхностью упругого полупространства. В этом случае пригодна та же квазистатическая модель неглубокого внедрения твердых частиц эродента в поверхность эродирующего элемента конструкции в условиях герцевского типа контакта, которая рассматривалась ранее в [8]. Модель можно считать справедливой, так как время прохождения волной напряжения в

поверхностном слое элемента расстояния, равного наибольшему радиусу пятна контакта, почти на порядок меньше продолжительности соударения  $\tau_{imp}$ .

Обобщим эту модель применительно к трехмерному анализу ударного взаимодействия твердой абразивной частицы с поверхностью вращающегося конструктивного элемента в условиях дополнительного воздействия жидкости. Перемещение частицы вдоль эродирующей поверхности рассмотрим относительно следующих систем координат (рис. 3,а):

- связанной с осью вращения конструкции прямоугольной системы  $xzr$ ;
- связанной с поверхностью конструктивного элемента  $P$  прямоугольной системы  $\tau_1 \tau_2 n$ .

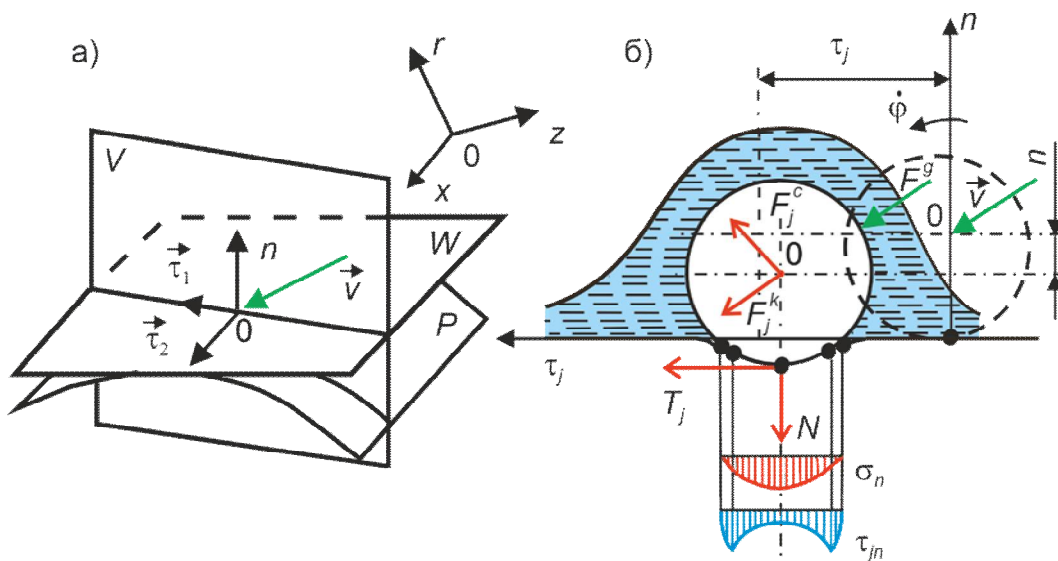


Рис. 3. Схема взаимодействия твердой частицы с поверхностью конструктивного элемента: а – система координат; б – система действующих сил

Ось  $\tau_1$  совпадает с линией пересечения плоскостей  $W$  (касательная к поверхности  $P$  в точке соударения) и  $V$  (нормальная к  $W$  и содержащая вектор скорости соударения  $\vec{v}$ ), ось  $n$  - нормаль к поверхности  $P$ , ось  $\tau_2$  - дополняет тройку ортов до правой системы координат. Как правило, главные радиусы кривизны поверхности натуральных конструкций на несколько порядков превышают длину перемещения частицы вдоль эродирующей

поверхности, поэтому в дальнейших построениях кривизна поверхности  $P$  не учитывается.

На твердую частицу эродента в процессе соударения действует система сил, показанных на рис. 3, б:

- радиальная контактная сила Герца

$$N = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi(k+k_p)} d_p^{0.5} n^{1.5}, \quad (9)$$

направленная по нормали к поверхности полупространства и вызывающая на расстоянии  $y$  от центра пятна контакта давление

$$\sigma_n = \frac{4}{\pi^2(k+k_p)d_p} \left( \frac{d_p n}{2} - y^2 \right)^{0.5}; \quad (10)$$

$$T_j = \left\langle 1 - \left[ 1 - \frac{2\pi(k+k_p) \left[ (\tau_1^2 + \tau_2^2)^{0.5} - \frac{d_p \varphi}{2} \right]}{(2-\nu_p)(g+g_p)Gfn} \right]^{1.5} \right\rangle \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} f d_p^{0.5} n^{1.5} \cos(\bar{\tau}_j, \bar{v}_{12}), \quad (11)$$

направленная вдоль линии пересечения касательных плоскостей к поверхности конструкции  $W$  и к траектории движения частицы и вызывающая на расстоянии  $y$  от центра пятна контакта касательные напряжения

$$\tau_{jn} = \frac{T_j}{\pi \sqrt{2d_p n(d_p n - y^2)}}; \quad (12)$$

- центробежная сила от вращения частицы вместе с конструкцией в системе  $xzr$ , направленная по радиусу вращения  $r$ :

$$F^c = \frac{4\pi}{3} \rho_p d_p^3 \omega^2 r; \quad (13)$$

- сила Кориолиса

$$F^K = 2\omega(\dot{\tau}_1^2 + \dot{\tau}_2^2 + \dot{n}^2)^{0.5} \sin(\bar{\omega}, \bar{v}); \quad (14)$$

- гидродинамическая сила скоростного напора объема жидкости за тыльной поверхностью частицы

$$F^g = \frac{\pi}{8} C_x \rho' d_p^2 (v - \dot{n})^2, \quad (15)$$

направленная вдоль вектора скорости капли в точке соударения и действующая с момента начального касания поверхности конструкции в течение промежутка времени

$$m_p \ddot{\tau}_1 = -T_1 - F^c \cos(\bar{\tau}_1, \bar{r}) - F^K \cos(\bar{\tau}_1, \bar{F}^K) - F^g \cos(\bar{\tau}_1, \bar{v}), \quad (17)$$

$$m_p \ddot{\tau}_2 = -T_2 - F^c \cos(\bar{\tau}_2, \bar{r}) - F^K \cos(\bar{\tau}_2, \bar{F}^K), \quad (18)$$

$$m_p \ddot{n} = -N - F^c \cos(\bar{n}, \bar{r}) - F^K \cos(\bar{n}, \bar{F}^K) - F^g \sin(\bar{\tau}_1, \bar{v}), \quad (19)$$

$$J_p \ddot{\varphi} = 0.5(T_1^2 + T_2^2)^{0.5} \left[ d_p + \frac{Nv_p}{G_p(2d_p n)^{0.5}} \right] \quad (20)$$

при начальных условиях

$$\tau_1(\tau=0) = \tau_2(\tau=0) = n(\tau=0) = \varphi(\tau=0) = \dot{\tau}_2(\tau=0) = 0; \quad (21)$$

$$\dot{\tau}_1(\tau=0) = v_{p0} \cos(\bar{v}', \bar{\tau}_1); \quad \dot{n}(\tau=0) = v_{p0} \sin(\bar{v}', \bar{\tau}_1); \quad \dot{\varphi}(\tau=0) = \dot{\varphi}_0, \quad (22)$$

- тангенциальная контактная сила с проекциями на оси  $\tau_1$  и  $\tau_2$  поверхностной системы координат  $\tau_1 \tau_2 n$  ( $j=1, 2$ )

$$\Delta\tau \approx \frac{2r_\kappa - x_0 - d_p}{v'}, \quad (16)$$

где  $g = 2v/G$ ,  $g_p = 2v_p/G_p$ ,  $k = (1-\nu)/2\pi G$ ,  $k_p = (1-\nu_p)/2\pi G_p$  - коэффициенты упругих свойств материалов конструктивного элемента и частицы;  $\nu$ ,  $\nu_p$  - коэффициент Пуассона материалов конструктивного элемента и частицы;  $G$ ,  $G_p$  - модуль сдвига материалов конструктивного элемента и частицы;  $\rho_p$ ,  $\rho'$  - плотность материала частицы и капли;  $\omega$  - угловая скорость вращения конструктивного элемента;  $\bar{v}_{12}$  - векторный элемент проекции траектории частицы на плоскость  $W$ ;  $f$  - коэффициент трения между частицей и материалом поверхности;  $v$  - линейная скорость частицы;  $C_x$  - коэффициент аэродинамического сопротивления для тыльной стороны частицы.

Проецируя векторы перечисленных сил, получим систему четырех дифференциальных уравнений движения частицы:

где  $m_p, J_p$  - масса и момент инерции частицы.

При анализе процесса взаимодействия частицы с не вращающимся конструктивным элементом система (17) – (20) упрощается вследствие равенства 0 инерционных сил  $F^c$  и  $F^K$ . Следует также отметить, что для условий газообразивной эрозии (когда жидкая фаза отсутствует) эта система также упрощается вследствие равенства 0 гидродинамической силы  $F^g$ .

В общем случае входящая в начальные условия скорость частицы  $v_{p0}$  в момент её

$$\frac{dv_p}{dx} = \begin{cases} \frac{2\rho' [C_{x1} (v' - v_p)^2 - C_{x2} v_p^2]}{3 \left( \rho_p + \frac{\rho'}{2} \right) d_p v_p}, \\ - \frac{2C_{x2} \rho' v_p}{3 \left( \rho_p + \frac{\rho'}{2} \right) d_p} \text{ при } \int_0^{\tau} (v' - v_p) dt > \Delta x = 2r_d - x_0 - d_p \end{cases} \quad (23)$$

с начальными условиями  $x = 0$  и  $v_p(0) = v'$ ,

где  $C_{x1}, C_{x2}$  - коэффициенты аэродинамического сопротивления для передней и тыльной сторон частицы.

Решение уравнения (23) в конечной точке траектории движения частицы в объеме жидкости на протяжении длины пути  $\delta_f$  является искомой величиной  $v_{p0}$ . Относительное снижение скорости частицы в жидкости  $v_{p0}/v$  определяется плотностью частицы и длиной пути  $\delta_f$  (рис. 4).

Действующие на твердую частицу силы неодинаковы по величине и характеру изменения во времени. Доминирующее воздействие оказывают контактные силы - сумма наибольших значений инерционных и гидродинамической сил составляет несколько процентов от наибольшего значения контактных сил. Однако в начальной стадии соударения, когда контактные силы вследствие малой глубины внедрения частицы ещё малы, инерционные силы максимальны и могут играть заметную роль. Продолжительность этой стадии невелика по отношению ко времени удара, так как контактные силы быстро возрастают до максимального значения в

соприкосновения с поверхностью может отличаться от скорости подлета из-за тормозящего воздействия со стороны жидкости, присутствующей на поверхности конструктивного элемента. Рассматривая движение частицы под действием противоположно направленных гидродинамических сил скоростного напора объемов жидкости на передней и тыльной поверхностях с учетом присоединенной массы жидкости, на основе принципа Даламбера получаем дифференциальное уравнение:

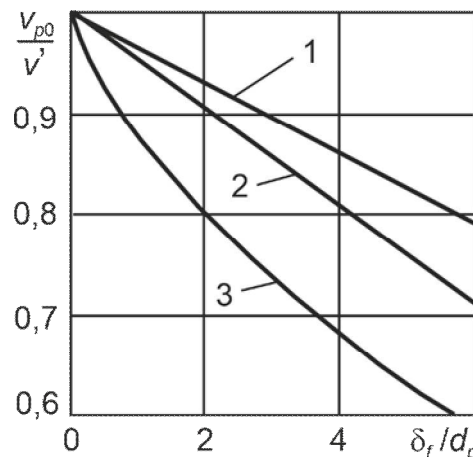


Рис. 4. Снижение скорости соприкосновения частицы с поверхностью конструктивного элемента при наличии жидкости (материал частицы: 1 – сталь; 2 – окалина; 3 – корунд)

момент наибольшего внедрения частицы в поверхностный слой конструктивного элемента. Влияние наличия жидкости приводит к увеличению глубины внедрения частицы, времени её взаимодействия с поверхностью, величины давления на пятне контакта и повреждения материала микрообъемов конструкции.

Присутствие жидкости может заметно сказываться на поведении частицы при отскоке. При относительном размере

$d_p/2r_d \rightarrow 1$  жидкость воздействует на тыльную поверхность частицы в течение начального промежутка времени, меньшего продолжительности взаимодействия частицы с упругим полупространством  $\tau_{imp}$ . Затем сила от скоростного напора жидкости исчезает. Тормозящая отскок частицы сила отсутствует, и скорость частицы  $v_{rL}$  при режимах соударения, близких к абсолютно упругому, может превысить начальную скорость  $v_{p0}$ , а при отсутствии жидкости на поверхности конструктивного элемента - и скорость  $v'$ . При режимах соударения, значительно отличающихся от названного ( $v_{rL} < v_{p0}$ ), однако, выше, чем скорость отскока сухой частицы  $v_{rD}$ . Для сравнительно крупных частиц с толщинами жидкости на их тыльной поверхности  $\Delta x \geq v' \tau_{imp}$  воздействие жидкости наблюдается в течение всего времени  $\tau_{imp}$  и уменьшение скорости отскока можно приближенно оценить с помощью закона сохранения энергии:

$$\frac{v_{rL}}{v_{rD}} = \left\{ 1 - \frac{3[\rho'(v_{p0} + v_{rD})^2(\Delta x - v' \tau_{imp}) + \pi \sigma]}{\rho_p d_p v_{rD}^2} \right\}^{0,5}, \quad (24)$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

На рис. 5 представлены результаты численного расчета по зависимостям (17) – (20) параметров соударения частицы с поверхностью конструктивного элемента, не покрытой слоем жидкости ( $\delta_f = 0$ ). Как следует из расчета, для относительно малых частиц наличие окружающей их жидкости принципиально сказывается на поведении во время отскока - наблюдается один или несколько повторных ударов при увеличении с каждым последующим соударением его продолжительности и уменьшении скорости удара и глубины наибольшего внедрения. Для удара сухой прочной частицы характерна следующая закономерность между параметрами соударения: при наибольшем внедрении скорость частицы падает до 0, а поверхностное давление возрастает до максимального значения. Закономерность хорошо проявляется

при ударе частицы с  $d_p/2r_d = 0,75$  (кривая 2 на рис. 5). Однако от неё заметны отклонения у меньших частиц. Эти отклонения проявляются все более при каждом последующем соударении и отскоке. Потеря скорости  $v_{rL}/v_{rD}$ , подсчитанная по скорости отскока при последнем повторном соударении, оказывается значительной. Например, для рассмотренной на рис. 5 частицы с  $d_p/2r_d = 0,25$  даже в режиме абсолютно упругого соударения она составила 0,243. Для ещё более мелких частиц следует ожидать отношение  $v_{rL}/v_{rD}$ , близкое к 0, невозможность отскока от поверхности конструкции и переход в поверхностную пленку жидкости. С уменьшением  $d_p/2r_d$  этот переход упрощается, так как параллельно уменьшению отношения  $v_{rL}/v_{rD}$  и повышению тормозящего действия жидкости на поверхности конструктивного элемента происходит повышение пороговой скорости отскока

$$v_{\min} = \left( \frac{3\pi\sigma}{\rho_p d_p} \right)^{0,5} \quad (25)$$

минимально необходимой для преодоления частицей силы поверхностного натяжения со стороны жидкости. Очевидно, таков механизм насыщения твердыми абразивными частицами пленок жидкости, движущихся по поверхности эродирующих конструктивных элементов проточных частей влажнопаровых турбинных ступеней и вызывающих их гидроабразивный износ.

#### 4. Оценка эрозионно-ударного повреждения поверхности конструктивного элемента

Получаемое материалом поверхностного слоя конструктивного элемента при одиночном акте соударения покрытой жидкостью частицы эрозионно-усталостное повреждение  $d_1$  образуется в результате суперпозиции отдельных повреждений, связанных с действием всех пиков поверхностного давления значительной амплитуды гидродина-

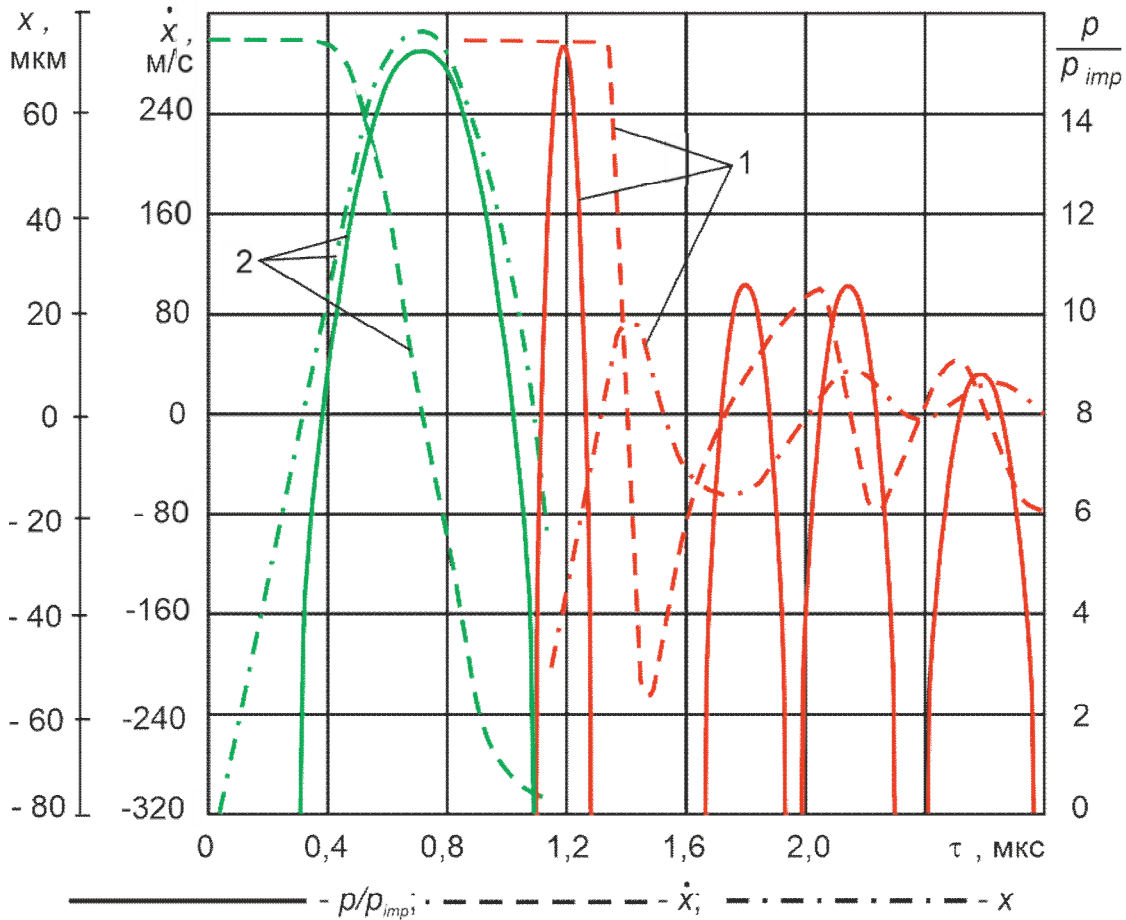


Рис. 5. Заключительная стадия соударения твердой частицы эродента с поверхностью упругого полупространства (конструктивного элемента) при ударе капли радиусом 200 мкм со скоростью 300 м/с: 1 –  $d_p = 100$  мкм,  $x_0 = 150$  мкм; 2 –  $d_p = 300$  мкм,  $x_0 = 50$  мкм

мического  $d_{1d}$  и механического при каждом возможном  $i$ -м отскоке частицы  $(d_{1p})_i$ :

$$d_1 = d_{1d} + \sum_i (d_{1p})_i \quad (26)$$

Так как второй и последующие возможные отскоки твердой частицы приводят к ударному нагружению разных микроплощадок поверхности конструктивного элемента, то эрозионно-усталостное повреждение  $d_1$

от удара единичной композитной капли в пределах одной микроплощадки будет выражаться зависимостью:

$$d_1 = d_{1d} + d_{1p} \quad (27)$$

Слагаемое  $d_{1d}$  выражается зависимостью (26), в которую дополнительно вводится коэффициент

$$K_p = \begin{cases} \exp\left[-\frac{6x_0}{r_d(v'/C'+1)}\right] + \xi_{12}^{rl} (1 + \xi_{10}^{rl}) & \text{при } x_0 < x_{0,cr} \\ 1 & \text{при } x_0 \geq x_{0,cr} \end{cases} \quad (28)$$

учитывающий повышение гидродинамического давления из-за наличия в капле твердой частицы:

$$d_{1d} = \frac{1}{N_{e0} + N_e S_N} \left[ K_p \left( \frac{r_d}{W'_R + N_e S_W} \right)^{1,5} v'_n (v'_R)^2 \right]^{(\bar{m} - N_e S_m)} \quad (29)$$

где  $N_e$  - уровень каплеударной эрозионной стойкости материала в пределах микроплощадки соударения с композитной каплей, который является случайной величиной с нормальным законом распределения [10, 11];  $N_{e0}$  ( $S_N$ ),  $\bar{W}'_R$  ( $S_W$ ),  $\bar{m}$  ( $S_m$ ) – средние значения (стандартные отклонения) вероятностных значений эрозионно-усталостных свойств материала поверхности конструктивного элемента  $N_{e0}$ ,  $W'_R$  и  $m$ , введенные в рамках Единой вероятностной теории эрозионного изнашивания [12].

Входящий в (29) параметр  $v'_R$  является скоростным эквивалентом предела эрозионной выносливости в условиях каплеударного нагружения  $\sigma'_{eR}$  материала поверхности конструктивного элемента. По физическому смыслу она представляет собой пороговую величину нормальной составляющей скорости соударения капли минимального эрозионноопасного при данной скорости размера  $r_{dR}$ , с превышением которой материал конструктивного элемента получает эрозионно-усталостное повреждение.

Коэффициент  $K_p$ , величина которого зависит от случайного положения твердой частицы эродента в капле, наряду с эрозионно-усталостными свойствами материала, является причиной вероятностного характера величины повреждения  $d_{1d}$ .

Методологический подход к нахождению функциональной зависимости, связывающей величину повреждения  $d_{1p}$  с характерными параметрами эрозионно-ударного воздействия (скоростью и углом соударения, размером твердой частицы), аналогичен рассмотренному в [8, 11] для случая каплеударного и кавитационного разрушения. Предел эрозионной выносливости материала в условиях абразивно-ударного нагружения с учетом предложенной в [13, 14] зависимости для определения амплитуды нормальной к фронту продольной волны компоненты тензора напряжений может быть выражен следующим образом:

$$\sigma_{eR} = \frac{0,424(1-\nu)}{2\pi\nu^3(k+k_p)} \left[ \frac{(1-2\nu)C_1\tau_{imp}n_m^3}{d_p x^3} \right]^{0,5}, \quad (30)$$

где  $x$  – координата, определяющая глубину расположения расчетной точки под поверхностью конструктивного элемента;  $n_m$  – максимальная глубина внедрения твердой частицы эродента в поверхностный слой конструктивного элемента;  $C_1$  – скорость продольной волны напряжения в материале конструктивного элемента.

Зависимость (30) также содержит соответствующую  $\sigma_{eR}$  характеристику эрозионной стойкости - скоростной эквивалент предела эрозионной выносливости  $v_R$ . Он неявным образом присутствует в выражениях для продолжительности удара  $\tau_{imp}$  и максимальной глубины внедрения частицы  $n_m$ .

Согласно (30) скоростной эквивалент  $v_R$  зависит от свойства материала конструкции  $\sigma_{eR}$  и размера частицы

$$\left( \frac{\tau_{imp} n_m^3}{d_p} \right)^{0,5} = \frac{2\pi\nu^3(k+k_p)\sigma_{eR} x^{1,5}}{0,424(1-\nu)^2 [(1-2\nu)C_1]^{0,5}}. \quad (31)$$

Как в случаях каплеударного и кавитационного нагружения [8], при абразивно-ударном воздействии величина  $\sigma_{eR}$  является линейной функцией скорости соударения частицы. Вид зависимости  $\sigma_{eR} \sim v_p$  подтверждается результатами расчета по зависимостям (17) – (20)  $\tau_{imp}$  и  $n_m$  для частиц из разнородных материалов и различных размеров. Часть из них приведена на рис. 6,а в виде графиков комплекса  $(\tau_{imp} n_m^3)^{0,5} \sim v_p$ . В широком диапазоне скоростей соударения он достаточно хорошо совпадает с прямой линией - относительная невязка составляет 0...3%. Для соотношения (31) наблюдается абсолютное качественное совпадение с аналогичной зависимостью гиперболического типа

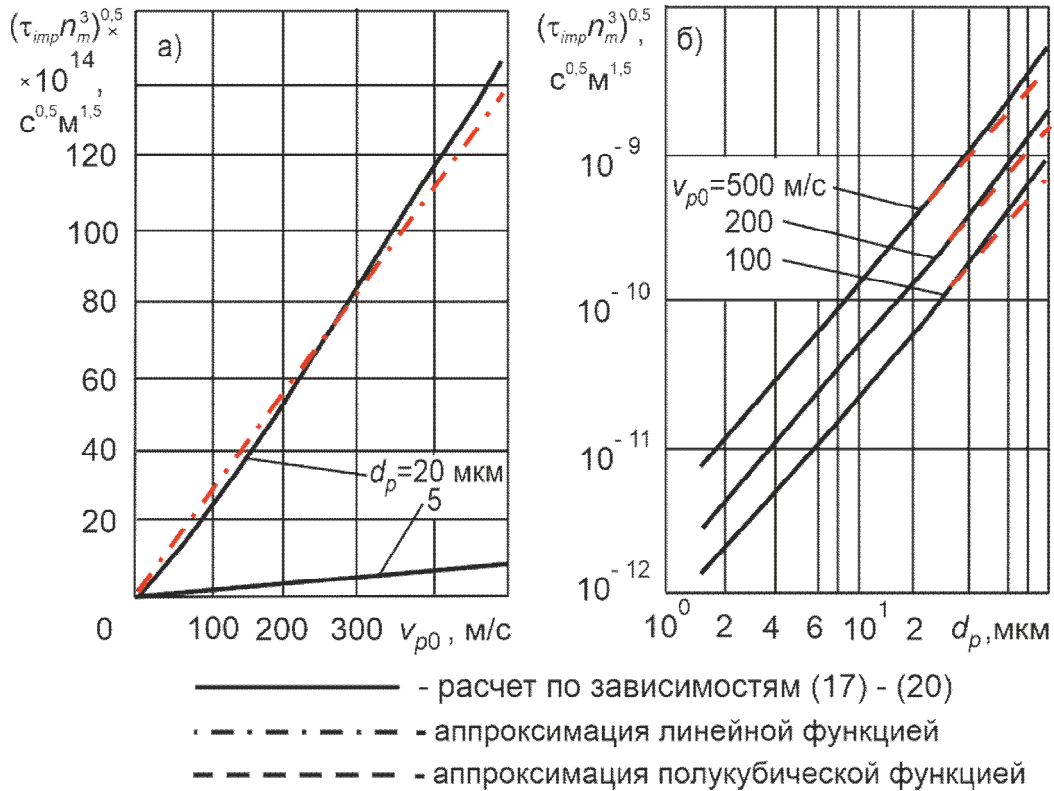


Рис. 6. Зависимость комплексных параметров соударения от скорости и размера твердой частицы эродента

$$v'_R r'_{dR} = \frac{v^3 \sigma_{eR}}{0,045(1-v)^2} \left[ \frac{C'x}{(1-2v)C_1} \right]^{0,5} 1 + \frac{\rho'C'}{\rho C_1} = const, \quad (32)$$

связывающей величины  $v'_R$  и  $r'_{dR}$  в случае каплеударного и кавитационного износа, так как проведенные по зависимостям (17) – (20) расчеты соударения твердых частиц эродента (рис. 6, б) позволяют аппроксимировать соотношение (31) в виде:

$$\left( \frac{\tau_{imp} n_m^3}{d_p} \right)^{0,5} = v_{p0} d_p^2. \quad (32)$$

Отклонения начинают проявляться у достаточно больших по размеру частиц  $d_p \geq 50...60$  мкм при скоростях более 400 м/с, параметры соударения которых соответствуют не рассматриваемой в данной физической модели зоне повреждения материала под действием однократного акта соударения.

Это следует рассматривать как подтверждение физической тождественности процессов накопления эрозионных повреждений поверхностного слоя конструктивных элементов в условиях механических видов эрозии - каплеударной, кавитационной, газо- и гидроабразивной.

Выявленное совпадение качественных закономерностей процессов эрозионно-усталостного повреждения материалов при различных видах эрозии позволяет по аналогии с зависимостью (29) предложить следующую зависимость для оценки величины эрозионно-усталостного повреждения для случая соударения твердых частиц эродента:

$$d_{1p} = \frac{1}{\bar{N}_{e0} + N_e S_N} \left[ \left( \frac{d_p}{\bar{W}_R + N_e S_W} \right)^{1,5} v_{p0} (v_R)^2 \right]^{(\bar{m} - N_e S_m)} \quad (33)$$

причем параметры нагружения  $v_R$  и  $d_{pR}$  связаны соотношением

$$d_{pR} v_R^2 = W_R = const. \quad (34)$$

Найденное в соответствии с зависимостями (26) или (27) эрозионно-усталостное повреждение, получаемое материалом поверхностного слоя конструктивного элемента при одиночном акте соударения композитной капли жидкости с находящейся в ней твердой частицей, является основой для дальнейшего проектирования конструктивных, технологических и режимных мероприятий по предотвращению эрозии технологического оборудования [15].

### 5. Заключение

Проведенный теоретический анализ тех взаимосвязанных механических и гидродинамических процессов, которые последовательно-параллельно протекают при высоко-

скоростном соударении композитной капли жидкости с находящейся в ней твердой частицей с упругой поверхностью конструктивного элемента технологического оборудования, а также количественные результаты с помощью математических моделей указанных процессов показывают, что в условиях трехфазного эрозионного изнашивания нельзя рассматривать отдельно явление каплеударного нагружения и явление абразивноударного нагружения. На параметры эрозионно-ударного нагружения и повреждения поверхности конструктивных элементов оказывают взаимное комплексное влияние все контактирующие фазы. Это делает невозможным простой перенос на условия трехфазного эрозионного изнашивания результатов исследований и методов прогнозирования либо только каплеударного, либо только газоабразивного эрозионного изнашивания.

### Список литературы

1. Трухний А.Д., Ломакин Б.В. Теплофикационные паровые турбины и турбоустановки. М.: Издательство МЭИ, 2006. 539 с.
2. Зарубина Н.В., Карницкий Н.Б. Турбинные установки ТЭС и АЭС. Устройство, эксплуатация и ремонт. Минск: Вышэйшая школа», 2024. 431 с.
3. Сумм Б.Ю., Горюнов Ю.В. Физико-химические основы смачивания и растекания. М.: Химия, 1976. 232 с.
4. Mechanisms of Sand and Dust Erosion in Gas Turbine Engines (DTIC AD0876584). Fort Belvoir: Defense Technical Information Center, 1969.
5. Эрозия / Под ред. К.Прис. М.: Мир, 1982. 464 с.
6. Виноградов В.Н., Сорокин Г.М., Колокольников М.Г. Абразивное изнашивание. М.: Машиностроение, 1990. 224 с.
7. Lesser M.B., Field Y.E. The geometric wave theory of liquid impact // Proc. 6<sup>th</sup> Int. Conf. on Erosion by Liquid and Solid Impact, Cambridge, 5 – 8 Sept. 1983. P. 17/1–17/9.
8. Лагерев А.В. Вероятностная теория

### References

1. Trukhniy A.D., Lomakin B.V. *Teplofikatsionnye parovye turbiny i turboustanovki* [Thermal steam turbines and turbine installations]. Moscow, Izdatelstvo MEI, 2006. 539 p. (In Russian)
2. Zarubina N.V., Karnitskiy N.B. *Turbinnye ustanovki TES i AES. Ustroystvo, ehkspluatatsiya i remont* [Turbine installations of thermal power plants and nuclear power plants. Device, operation and repair]. Minsk, Vyshehyshaya shkola, 2024. 431 p. (In Russian)
3. Summ B.Yu., Goryunov Yu.V. *Fiziko-khimicheskie osnovy smachivaniya i rastekaniya* [Physico-chemical bases of wetting and spreading]. Moscow, Khimiya, 1976. 232 p. (In Russian)
4. Mechanisms of Sand and Dust Erosion in Gas Turbine Engines (DTIC AD0876584). Fort Belvoir: Defense Technical Information Center, 1969.
5. Treatise on materials science and technology. Volume 16. Erosion. Bell Telephone Laboratories, Inc., 1979.
6. Vinogradov V.N., Sorokin G.M., Ko-



‡ [Erosion of steam turbines: a probabilistic approach: in 3 vol. Vol. 3. Prevention of steam turbine erosion]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2006. 255 p. DOI: 10.5281/zenodo.1311907 (In Russian)

УДК (UDC) 625.08

НАГРУЖЕННОСТЬ ОПОРНЫХ КАТКОВ ГУСЕНИЧНОГО ДВИЖИТЕЛЯ  
БУЛЬДОЗЕРАLOADING OF THE SUPPORT ROLLERS OF THE CRAWLER MOVER OF  
THE BULLDOZERЛесковец И. В.<sup>1</sup>, Бойко Г. В.<sup>2</sup>, Федин А. П.<sup>2</sup>  
Leskovets I. V.<sup>1</sup>, Boyko G. V.<sup>2</sup>, Fedin A.P.<sup>2</sup><sup>1</sup> – Белорусско-Российский университет (Могилев, Беларусь)<sup>2</sup> – Волгоградский государственный технический университет (Волгоград, Россия)<sup>1</sup> – Belarusian-Russian University (Mogilev, Belarus)<sup>2</sup> – Volgograd State Technical University (Volgograd, Russian Federation)

**Аннотация.** В статье представлен анализ исследований, посвященных определению сил, нагружающих элементы гусеничного движителя машин технического сельскохозяйственного и военного назначения. Отмечается, что исследования последних лет направлены на использование комплексного моделирования, позволяющего учитывать влияние систем и механизмов, оказывающих наиболее существенное влияние на исследуемый элемент. Авторами проведены виртуальные эксперименты с моделированием режима копания грунта на основе использования имитационной модели. Полученные результаты позволили установить особенности нагружения отдельных катков, величины средних нагрузок и значения коэффициентов динамичности. Представленные результаты показывают важность этапа функционального проектирования, позволяющего без дорогостоящих экспериментальных исследований установить величины динамических нагрузок, действующих на механизмы проектируемых машин.

**Ключевые слова:** гусеничный бульдозер, гусеничный движитель, опорный каток.

**Дата получения статьи:** 13.01.2026  
**Дата принятия к публикации:** 17.05.2026  
**Дата публикации:** 25.06.2026

**Сведения об авторах:**

**Лесковец Игорь Вадимович** – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Транспортные и технологические машины», Белорусско-Российский университет,  
e-mail: leskovets1966@mail.ru.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6411-6809>

**Бойко Григорий Владимирович** – кандидат технических наук, доцент, проректор, доцент кафедры «Техническая эксплуатация и ремонт автомобилей», Волгоградский государственный технический университет, e-mail: boyko@vstu.ru.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-4957-8516>

**Федин Алексей Павлович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Техническая

**Abstract.** The article presents an analysis of studies devoted to the determination of forces loading the elements of the caterpillar propulsion of technical agricultural and military vehicles. It is noted that research in recent years has been aimed at using integrated modeling, which allows taking into account the influence of systems and mechanisms that have the most significant impact on the element under study. The authors conducted virtual experiments with modeling the regime of soil digging based on the use of a simulation model. The results obtained made it possible to establish the loading characteristics of individual rollers, the values of average loads and the values of dynamic coefficients. The presented results show the importance of the functional design stage, which makes it possible to determine the values of dynamic loads acting on the mechanisms of the designed machines without expensive experimental studies.

**Keywords:** crawler bulldozer, crawler mover, roller bearing.

**Date of manuscript reception:** 13.01.2026  
**Date of acceptance for publication:** 17.05.2026  
**Date of publication:** 25.06.2026

**Authors' information:**

**Igor V. Leskovets** – Cand. of Sci. (Engineering), Associate Professor, Head of the Department “Transport and Technological Machines” at Belarusian-Russian University, e-mail: leskovets1966@mail.ru.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6411-6809>

**Grigory V. Boyko** – Cand. of Sci. (Engineering), Associate Professor, Vice-Rector, Associate Professor of the Department “Operation and Maintenance of the Vehicles” at Volgograd State Technical University, e-mail: boyko@vstu.ru.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-4957-8516>

**Alexey P. Fedin** – Cand. of Sci. (Engineering), Associate Professor, Associate Professor, of the Depart-

эксплуатация и ремонт автомобилей», Волгоградский государственный технический университет, e-mail: [falexey2005@yandex.ru](mailto:falexey2005@yandex.ru).  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0495-0516>

ment “Operation and Maintenance of the Vehicles”, Volgograd State Technical University, e-mail: [falexey2005@yandex.ru](mailto:falexey2005@yandex.ru).  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0495-0516>

## 1. Введение

Анализ современного состояния исследований в области определения и прогнозирования нагрузок на опорные катки позволяет выявить основные тренды и технологические подходы, преобладающие в данной области.

Одним из основных направлений является переход от анализа работы отдельных механизмов и систем к комплексному моделированию на основании системного подхода. Авторы современных исследований переходят от упрощённых расчётных схем к созданию высокодетализированных цифровых двойников. Фундаментальный обзор [1] определяет общие направления, подчёркивая, что точная оценка нагрузок невозможна без учёта нелинейного взаимодействия в системе «двигатель — подвеска — грунт». Это направление реализуется через два основных взаимодополняющих подхода. Первый – это многомассовое динамическое моделирование (multi-body dynamic MBD), которое стало стандартом для анализа динамики машины в целом. Работы [2, 3] показывают применение MBD для тяжёлой техники, в том числе гусеничной, позволяя количественно связать микропрофиль пути и эксплуатационные режимы с амплитудно-частотными характеристиками нагрузок на катки. В русскоязычных исследованиях аналогичный системный подход прослеживается в модели «трактор-грунт» [4] и в построении спектров циклических нагрузок на имитационной модели [5]. Второй подход – это углублённый анализ отдельных явлений и компонентов с помощью метода конечных элементов (МКЭ). В то время авторы [6] используют МКЭ для классического анализа напряженно-деформированного состояния самого катка, наиболее прогрессивные работы интегрируют МКЭ (FEA) в системные расчёты. Например, в исследованиях [7] применяется ко-симуляция MBD-FEA для передачи динамических сил прямо в модель прочности кронштейна, а авторы [8] разрабатывают высоко-

точные нелинейные модели контакта для детального изучения взаимодействия в паре «каток-гусеница».

Во многом направления исследований определяются типами исследуемой техники, что определяет специфику нагрузочных режимов и приоритеты анализа. В области военной и высокоскоростной техники исследования [9,10] фокусируются на экстремальных режимах, инерционных нагрузках при манёврах и усталостной долговечности в условиях высоких динамических перегрузок. Аналогичный прикладной военный контекст, но с акцентом на экспериментальное определение нагрузочных режимов, присутствует у авторов [11].

Для тяжёлых машин, таких как карьерные самосвалы и краны, критически важны методики измерения и учёт уникальных рабочих циклов. Исследования [12] предлагают методику натуральных измерений для горного самосвала. Авторы [13] исследуют актуальное направление адаптации методик для беспилотных платформ, чьи алгоритмы управления формируют уникальный спектр нагрузок. Исследования в области сельскохозяйственной техники, такие как работы [14, 4], сконцентрированы на взаимодействии с деформируемым грунтом. Их цель – не только анализ прочности, но и оптимизация энергозатрат и минимизация вредного уплотнения почвы, что позволяет рассмотреть в работе гусеничной техники экологические аспекты. Значительная часть публикаций посвящена не просто констатации нагрузок, а их использованию для инженерных задач повышения надёжности и эффективности. Важным инструментом становится построение и анализ спектров нагружения (блок-гистограмм) [15, 5], что позволяет применять методы расчёта усталости для прогнозной оценки долговечности. Работа [16] представляет полноценный цикл оптимизационного проектирования, где с помощью метода поверхности отклика (RSM) геометрия катка оптимизируется для снижения пиковых на-

пряжений. Это напрямую соотносится с рекомендациями по оптимизации, которые дают [6] на основе своего анализа МКЭ.

Авторы исследований [13], предлагают диагностику усталости по кинематическим параметрам во время стендовых испытаний, что указывает на тренд перехода от констатации разрушения к прогнозированию и мониторингу состояния узла. Наблюдается соответствие между расчётными и экспериментальными методами. Практически все авторы, предлагающие сложные модели подчёркивают необходимость их валидации натурными данными. Российский исследователь делает значительный вклад в разработку методик таких экспериментов: Симонов [11, 12] детально описывают организацию полигонных испытаний и оснащение датчиками массивных катков в жёстких условиях. Авторы [17] рассматривают методику расчёта для критического подшипникового узла, адаптируя общепринятые стандарты к специфике гусеничного движителя.

Анализ показывает, что современные исследования нагрузок на опорные катки носят междисциплинарный характер [18 - 20], объединяя теорию машинной динамики, механики грунтов, контактного взаимодействия и усталости материалов. Основным трендом является отказ от изолированного рассмотрения компонента в пользу его анализа как части сложной нелинейной системы «машина-среда». Англоязычные публикации в большей степени ориентированы на фундаментальные методологические разработки (модели контакта, оптимизационные алгоритмы) и анализ специфической техники (высокоскоростной, беспилотной). Русскоязычные работы демонстрируют сильную прикладную направленность, глубокую проработку экспериментальных методик и фокус на традиционных секторах — сельскохозяйственном, карьерном и специальном (военном) машиностроении. Проанализированные публикации взаимно дополняют друг друга, формируя комплексное представление о современных подходах к обеспечению прочности, долговечности и эффективности гусеничных движителей.

## 2. Постановка задачи

На стадии функционального проектирования гусеничных бульдозеров важной задачей является определение нагрузок на опорные катки машины с целью дальнейшего использования результатов расчетов для определения прочности и надежности элементов ходового оборудования.

### 2. Разработанные модели и методы

Авторами предлагается использовать имитационную модель гусеничного бульдозера для расчета характеристик подвесок при работе в режиме копания грунта. Имитационная модель основана на математической и динамической моделях, разработанных на основе системного подхода, который учитывает опорную поверхность, разрабатываемую среду, рабочее оборудование, раму, гусеничный движитель, трансмиссию, двигатель и действия оператора. Динамическая модель, представляющая взаимодействие опорной поверхности с траками и опорными катками представлена на рис. 1.

В локальной системе координат гусеничного движителя каток может перемещаться только в вертикальном направлении, т.к. рассматривается свечная подвеска. Таким образом, перемещение катка рассматривается в направлении оси ординат в относительной системе координат движителя и описывается уравнением

$$\frac{dy_k}{dt^2} m_k = (C_{np} \Delta y_{mk} - r_{np} \frac{dy_{mk}}{dt} - C_k \Delta L_{np} + r_k \frac{dy_{mk}}{dt} - m_k g), \quad (1)$$

где  $m_k$  — масса колеса;  $C_{np}$  — приведенный коэффициент жесткости трака и катка;  $\Delta y_{mk}$  — взаимное перемещение трака и катка;  $r_{np}$  — приведенный коэффициент демпфирования трака и катка;  $\Delta L_{np}$  — величина деформации пружины подвески катка.

На рис. 1 представлены:  $C_k$  — коэффициент жесткости подвески катка;  $r_k$  — коэффициент демпфирования подвески катка;  $G_k$  — сила тяжести катка;  $R_k$  — радиус катка;  $R_{mpk}$  — сила взаимодействия трака и катка;  $\Delta l$  —

расстояние от центра тяжести трака до точки взаимодействия его с катком;  $l$  – длина трака;  $h$  – высота трака;  $G_{\text{трк}}$  – сила тяжести трака;  $\varphi_{\text{трк}}$  – угол наклона трака относительно локальной системы координат трака.

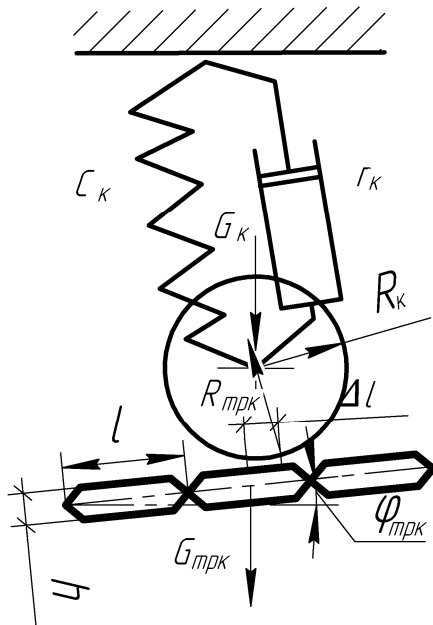


Рис. 1 Динамическая модель опорного катка

На основе математических моделей механизмов и систем бульдозера авторами разработана имитационная модель бульдозера в виде программного обеспечения, позволяющая получить параметры и характеристики исследуемой машины с помощью имитации рабочего процесса.

#### 4. Результаты и их анализ

В качестве модели для проведения виртуальных экспериментов принят прототип бульдозера массой 13 т. Количество опорных катков – пять, отсчет катков начинается слева в декартовой системе координат, расстояние между первым и вторым катками 0,58 м, вторым и третьим 0,68 м, третьим и четвертым 0,54 м, четвертым и пятым 0,58 м диаметр опорного катка – 0,4 м, коэффициент жесткости подвески 80000 Н/м, коэффициент демпфирования подвески 8000 Н·м/с, длина пружины в свободном состоянии 0,4 м, ход пружины 0,2 м, длина пружины в механизме подвески 0,356 м, масса катка 64 кг, коэффи-

циент радиальной жесткости катка 200000 Н·м, коэффициент демпфирования 2000 Н·м/с.

Вычислительный эксперимент проводился для режима копания грунта второй категории с параметрами: угол внутреннего трения  $28^\circ$  угол трения грунта по металлу  $26^\circ$ , угол наклона призмы волочения к горизонту  $35^\circ$ , удельное сцепление грунта ненарушенной структуры составляет 25 кПа, удельное сцепление грунта в призме волочения 0,2 кПа, удельное сопротивление резанию 48 кПа, плотность грунта на рабочем органе и в призме волочения  $1200 \text{ кг/м}^3$  Эксперименты проводились для толщин стружек 100, 150 и 200 мм.

Перед проведением вычислительного эксперимента программное обеспечение проводит расчет начальных параметров, который включает выбор заранее определенных механизмов и систем из соответствующей базы данных, формирование геометрических характеристик бульдозера, построение визуального изображения имитационной модели, формирование гусеничного обвода, определение начальных параметров подвесок опорных и поддерживающих катков, расчет натяжения гусеничного обвода, сравнение динамических параметров со статическими, определенными по известным, апробированным статическим методикам, определение геометрических координат и угла стабилизации машины относительно глобальной системы координат.

Условия проведения экспериментов: положение рычага акселератора 80%, включена передача, соответствующая суммарному передаточному числу трансмиссии 175, время полного включения сцепления 1 с, после начала движения бульдозер разгоняется до скорости 1 м/с, после чего начинается опускание рабочего оборудования до образования заданной толщины стружки, призма волочения набирается до полной высоты отвала, копание продолжается в течение 10 с.

Во время проведения экспериментов рассчитывались характеристики сил возникающих на всех катках бульдозера.

Полученные характеристики представлены на рис. 2 - 4. На рис. 2 представлены ха-

рактические характеристики сил, действующих в подвесках колес во время процесса копания при толщине стружки 100 мм.

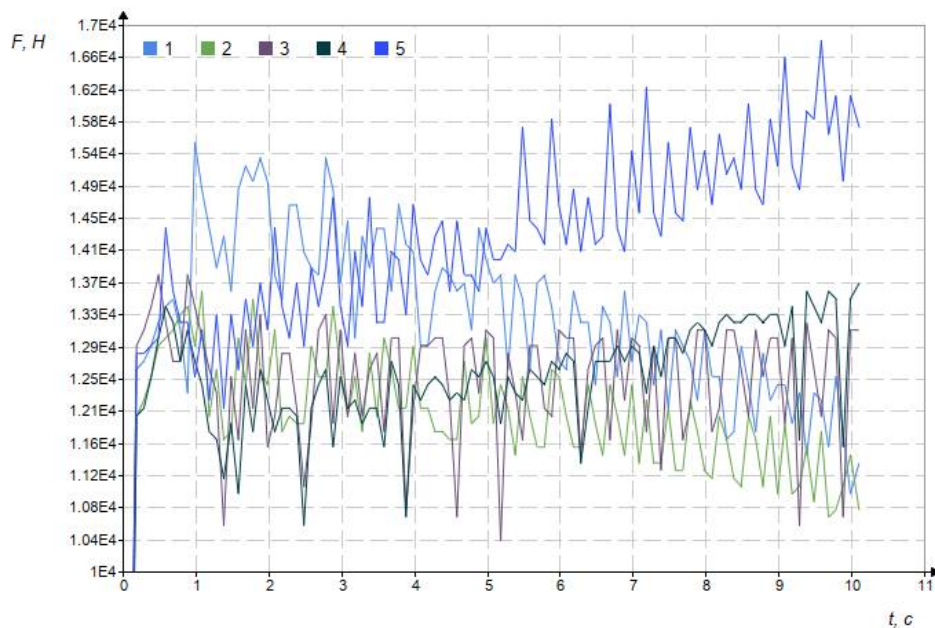


Рис. 2. Характеристики сил, действующих в подвесках опорных катков при толщине стружки 100 мм

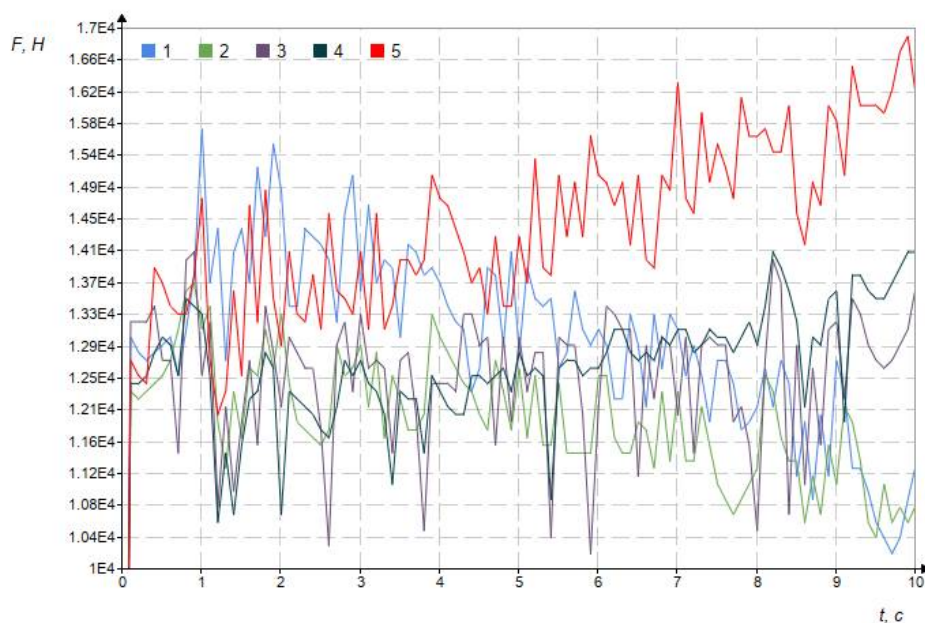


Рис. 3 Характеристики сил, действующих в подвесках опорных катков при толщине стружки 150 мм

Линией 1 отмечена характеристика сил на первом катке, линией 2 – на втором, 3- на третьем, для четвертого и пятого катков номера линий соответствующие.

Из рисунка видно, что силы, действующие на катки, находятся в зависимости от

времени копания, и соответственно, от высоты призмы волочения.

На катках с номерами один и два силы, действующие на катки, снижаются, т.к. во время копания в исследуемом режиме отвал бульдозера затягивается в грунт, и реакции

соответственно распределяются между катками, расположенными с противоположной стороны бульдозера.

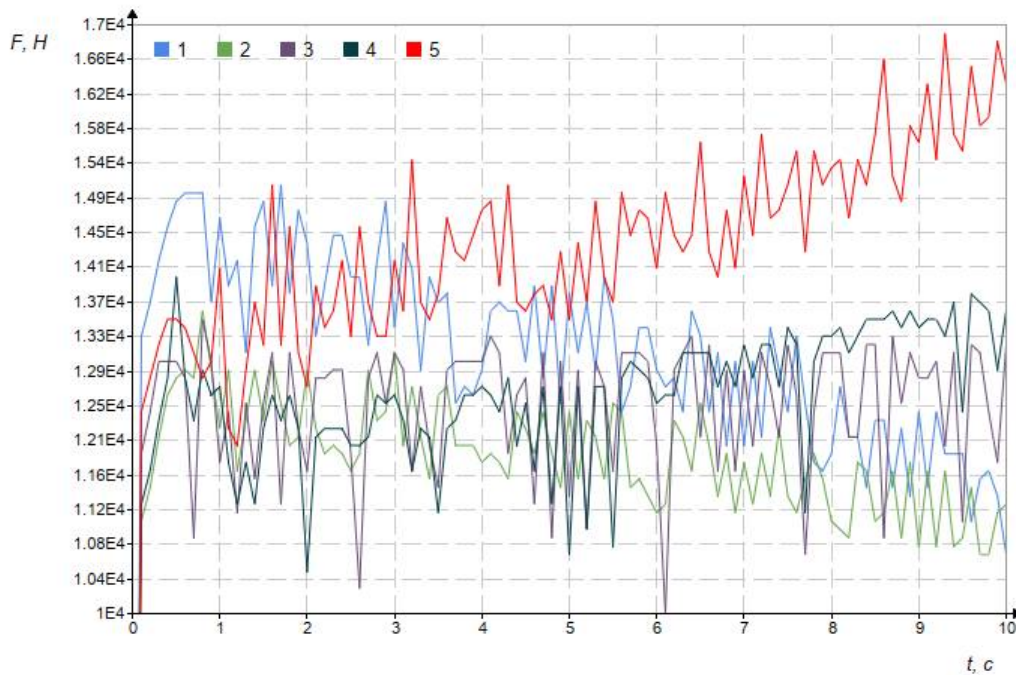


Рис. 4 Характеристики сил, действующих в подвесках опорных катков при толщине стружки 200 мм

Аналогичные процессы происходят при копании грунта с толщинами стружек 150 и 200 мм, результаты вычислительных экспериментов с данными толщинами стружек представлены на рис. 3 и 4.

Анализ рассмотренных экспериментов показывает, что во всех случаях нагрузки на ближний к отвалу каток увеличиваются во время транспортирования призмы волочения. Это говорит о том, что в процессе копания происходит самозатягивание отвала. Величины сил, нагружающих близлежащее к отвалу колесо, увеличиваются от 13 до 15,8 кН в первом эксперименте, до 16,2 – во втором и третьем экспериментах.

Во всех исследованных случаях наименее нагруженными являются первые и вторые катки, при отсчете слева в декартовой системе координат. Все катки испытывают динамическое нагружение. В процессе движения бульдозера вместе с изменением средних величин сил, нагружающих катки, присутствуют негармонические непериодические ко-

лебания. Каждый каток испытывает нагружения индивидуального характера с разной амплитудой и периодами колебаний. При проведении конструкторских расчетов в данном случае можно использовать статистические характеристики, в виде математического ожидания и коэффициентов динамичности.

Статистические характеристики сил, нагружающих катки, представлены в табл. 1.

Анализ результатов вычислительных экспериментов, представленных в табл. 1 показывает, что наибольшие нагружения испытывают катки расположенные ближе к рабочему оборудованию бульдозера.

Наибольшие коэффициенты динамичности приходятся на первый и последний катки.

Катки, расположенные в середине опорного контура, испытывают меньшие динамические нагрузки.

Таблица 1

## Статистические параметры сил, нагружающих опорные катки

Параметр	Номер катка				
	1	2	3	4	5
толщина стружки 100 мм					
Максимум	15453,37	13578,72	13829,65	13662,12	16806,19
Минимум	11037,24	10728,65	10414,80	10635,11	12121,95
Среднее арифметическое	13312,95	12042,23	12512,51	12524,98	14308,18
Коэффициент динамичности	1,40	1,27	1,33	1,28	1,39
толщина стружки 150 мм					
Максимум	15726,49	13662,52	14093,07	14094,04	16859,81
Минимум	10179,20	10357,82	10230,71	10590,66	12026,01
Среднее арифметическое	12999,46	11948,47	12516,75	12647,52	14440,48
Коэффициент динамичности	1,54	1,32	1,38	1,33	1,40
толщина стружки 200 мм					
Максимум	15114,88	13609,79	13467,66	14034,90	16870,08
Минимум	10729,28	10297,39	10049,62	10514,13	12012,76
Среднее арифметическое	13131,64	11882,45	12485,75	12632,61	14447,09
Коэффициент динамичности	1,41	1,32	1,34	1,33	1,40

## 5. Заключение

Проведенные исследования показывают, что определение на стадии функционального проектирования нагрузок на системы и механизмы бульдозера, в том числе на опорные катки является важным этапом, предшествующим расчетам на прочность, усталость и долговечность. Использование при расчетах сил, соответствующих статическому нагружению не в полной мере отвечает реальным нагрузкам. Применение коэффициентов динамичности также не в полной мере отвечает картине нагрузок на опорные катки, которая возникает в процессе копания грунта отвалом бульдозера. Имитационные эксперименты, моделирующие процесс копания грунта и учитывающие взаимодействие систем и механизмов бульдозера, которые оказывают значительное влияние на выходные характеристики машины, показывают, что опорные катки испытывают одинаковые по характеру, но разные по величине нагрузки. Катки, расположенные ближе к рабочему оборудованию, испытывают более высокие по средней величине, нагрузки, которые действуют с меньшими коэффициентами динамичности. Средние значения сил нагружения отлича-

ются в зависимости от расположения катков почти на 10%. Наибольшие нагружения испытывают катки, расположенные непосредственно возле рабочего оборудования. На втором месте по величине нагружения находятся катки, расположенные максимально далеко от рабочего оборудования. Т.е. самыми нагруженными являются катки, расположенные по краям гусеничного обвода. Расположенные в середине катки испытывают меньшие нагружения, причем меньшими являются не только средние величины, но и коэффициенты динамичности.

Третий и четвертый каток, которые расположены в середине гусеничного обвода, нагружены примерно одинаково. Средние величины нагружающих эти катки реакций незначительно отличаются от статических нагрузок, а величины коэффициентов динамичности изменяются от 1,28 до 1,33.

Представленные результаты имеют интерес для проектирования механизмов бульдозера, т.к. необоснованное применение коэффициентов динамичности может привести либо к недостаточной прочности проектируемых конструкций, либо к необоснованному увеличению массы механизмов, и, соответственно, стоимости машин в целом.

Следует отметить, что конкретные величины средних и динамических нагружающих сил, полученных в результате проведенных экспериментов, в других случаях могут отличаться от полученных при использованных при подготовке представленных материалов данных.

Кроме выше сказанного представленные результаты представляют интерес, т.к. полу-

чены на основе имитационных экспериментов, что значительно сокращает стоимость проектирования, так как не требуют дорогостоящих практических экспериментов и требуют значительно меньшего количества временных ресурсов, чем при экспериментальных исследованиях.

### Список литературы

1. Wong J.Y., Huang W. "Paths to the Future": The Evolution of Track Systems and the Analysis of Roadwheel Loads // *Journal of Terramechanics*. 2020. № 91. pp. 1-15.

2. Liu C., Zhang J., Wang P. Dynamic Load Prediction for Track Rollers of Heavy Tracked Vehicles Based on Multi-body Dynamics Simulation // *International Journal of Vehicle Design*. 2022. Vol. 88, № 1-4. pp. 64-83.

3. Ma Z., Li Y., Liu X. Experimental and Numerical Study on the Dynamic Load Characteristics of Track Rollers for a Large Crawler Crane // *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2021. Vol. 35, № 8. pp. 3465-3475.

4. Запрыгаев В.В., Филь А.А. Определение нагрузок на подвеску и опорные катки гусеничного трактора при движении по микрорельефу // *Тракторы и сельхозмашины*. 2020. № 7. С. 41-46.

5. Федоренко Р.В., Лебедев А.Т. Оценка долговечности опорных катков с учетом спектра циклических нагрузок, полученного при имитационном моделировании // *Тяжелое машиностроение*. 2021. № 5-6. С. 35-40.

6. Корж А.А., Волков А.В. Исследование НДС опорного катка методом конечных элементов // *Наука и техника*. 2019. Т. 18, № 4. С. 306-315. DOI: 10.21122/2227-1031-2019-18-4-306-315

7. Guo L., He R., Chen W. Dynamic Stress Analysis of Track Roller Bracket of Mining Crawler Transporter Based on Co-simulation // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. Vol. 1676. P. 012060.

8. Serban R., Freeman J.S., Taylor R.L. A High-Fidelity Contact Model for Tracked Vehicle Simulation: Application to Roller Load Analysis // *Nonlinear Dynamics*. 2023. Vol.

### References

1. Wong J.Y., Huang W. "Paths to the Future": The Evolution of Track Systems and the Analysis of Roadwheel Loads. *Journal of Terramechanics*, 2020, No. 91, pp. 1-15.

2. Liu C., Zhang J., Wang P. Dynamic Load Prediction for Track Rollers of Heavy Tracked Vehicles Based on Multi-body Dynamics Simulation. *International Journal of Vehicle Design*, 2022, Vol. 88, No. 1-4, pp. 64-83.

3. Ma Z., Li Y., Liu X. Experimental and Numerical Study on the Dynamic Load Characteristics of Track Rollers for a Large Crawler Crane. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2021, Vol. 35, No. 8, pp. 3465-3475.

4. Zapryagaev V.V., Fil A.A. Opredelenie nagruzok na podvesku i opornye katki gusenchnoho traktora pri dvizhenii po mikorelefu. *Traktory i selkhoz mashiny*, 2020, No. 7, pp. 41-46. (In Russian)

5. Fedorenko R.V., Lebedev A.T. Otsenka dolgovechnosti opornykh katkov s uchetom spektra tsiklicheskikh nagruzok, poluchennogo pri imitatsionnom modelirovanii. *Tyazheloe mashinostroenie*, 2021, No. 5-6, pp. 35-40. (In Russian)

6. Korzh A.A., Volkov A.V. Issledovanie NDS opornogo katka metodom konechnykh elementov. *Nauka i tekhnika*, 2019, Vol. 18, No. 4, pp. 306-315.

DOI: <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2019-18-4-306-315>. (In Russian)

7. Guo L., He R., Chen W. Dynamic Stress Analysis of Track Roller Bracket of Mining Crawler Transporter Based on Co-simulation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, Vol. 1676, P. 012060.

8. Serban R., Freeman J.S., Taylor R.L. A High-Fidelity Contact Model for Tracked Vehicle Simulation: Application to Roller Load

111, № 1. pp. 717-738.

9. Rubinstein D., Hitron R. A Detailed Model for Estimation of Loads Acting on a High-Speed Tracked Vehicle Suspension System // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 2021. Vol. 235, № 5. pp. 1221-1233.

10. Dhasarathan C., Ganesan V. Fatigue Life Assessment of Track Roller Assembly in Military Tracked Vehicles Using Finite Element Analysis and Strain-Life Approach // *Engineering Failure Analysis*, 2023. № 148. P. 107223.

11. Симонов В.Г. Исследование нагрузочных режимов опорных катков гусеничного движителя специальной техники на основе полигонных испытаний // *Строительные и дорожные машины*. 2019. № 10. С. 18-24.

12. Павлов В.А., Сергеев Н.И., Тихонов А.А. Методика экспериментального определения динамических нагрузок на опорные катки горного самосвала // *Горное оборудование и электромеханика*. 2021. № 5 (156). С. 25-31.

13. Ткаченко И.В., Белов Д.А. Анализ результатов стендовых испытаний опорных катков на многоцикловую усталость с использованием метода диагностики по кинематическим параметрам // *Вести в машиностроении*. 2024. № 3. С. 44-49.

14. Mazzù A., Formentini M., Boschetti G. A Multibody Approach for the Study of Track-Terrain Interaction and Its Effect on Roller Loads in Agricultural Tracked Vehicles // *Biosystems Engineering*, 2019. № 188. pp. 276-289.

15. Kot T., Novák P. Measurement and Evaluation of Load Spectra on Undercarriage Components of Unmanned Ground Tracked Vehicle // *Measurement*, 2024. № 225. P. 114067.

16. Park W., Lee J., Choi B. Design Optimization of Track Roller for Minimizing Dynamic Loads Using Response Surface Method // *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022. Vol. 65. № 3. P. 85.

17. Сапрон С.М., Медведев А.Л. Расчет эквивалентной нагрузки на подшипники

† Analysis. *Nonlinear Dynamics*, 2023, Vol. 111, No. 1, pp. 717-738.

† 9. Rubinstein D., Hitron R. A Detailed Model for Estimation of Loads Acting on a High-Speed Tracked Vehicle Suspension System. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 2021, Vol. 235, No. 5, pp. 1221-1233.

† 10. Dhasarathan C., Ganesan V. Fatigue Life Assessment of Track Roller Assembly in Military Tracked Vehicles Using Finite Element Analysis and Strain-Life Approach. *Engineering Failure Analysis*, 2023, No. 148, p. 107223.

† 11. Simonov V.G. Issledovanie nagruzochnykh rezhimov opornykh katkov gusenichnogo dvizhitelya spetsial'noy tekhniki na osnove poligonnykh ispytaniy. *Stroitel'nye i dorozhnye mashiny*, 2019, No. 10, pp. 18-24. (In Russian)

† 12. Pavlov V.A., Sergeev N.I., Tikhonov A.A. Metodika eksperimental'nogo opredeleniya dinamicheskikh nagruzok na opornye katki gornogo samosvala. *Gornoe oborudovanie i elektromekhanika* 2021, No. 5 (156), pp. 25-31. (In Russian)

† 13 Tkachenko I.V., Belov D.A. Analiz rezul'tatov stendovykh ispytaniy opornykh katkov na mnogotsiklovuyu ustalost' s ispol'zovaniem metoda diagnostiki po kinematicheskim parametram. *Vesti v mashinostroenii*, 2024, No. 3, pp. 44-49. (In Russian)

† 14. Mazzù A., Formentini M., Boschetti G. A Multibody Approach for the Study of Track-Terrain Interaction and Its Effect on Roller Loads in Agricultural Tracked Vehicles. *Biosystems Engineering*, 2019, No. 188, pp. 276-289.

† 15 Kot T., Novák P. Measurement and Evaluation of Load Spectra on Undercarriage Components of Unmanned Ground Tracked Vehicle. *Measurement*, 2024, No. 225, p. 114067.

† 16. Park W., Lee J., Choi B. Design Optimization of Track Roller for Minimizing Dynamic Loads Using Response Surface Method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, Vol. 65, No. 3, P. 85.

† 17. Sapron S.M., Medvedev A.L. Raschet ekvivalentnoy nagruzki na podshipniki

опорных катков гусеничного транспортера в различных режимах эксплуатации // Проблемы прочности и ресурса машин и конструкций. 2020. № 1. С. 112-120.

18. Петров А.И., Соколов Д.А. Моделирование контактного взаимодействия опорного катка с гусеничной лентой для оценки нагрузок // Транспортные системы и технологии. 2022. Т. 8, № 2. С. 89-101. DOI: 10.17816/transsyst20228289-101

19. Андреев П.С., Григорьев М.А. Численное исследование влияния скорости движения на распределение давления в системе «опорный каток – гусеничная лента – грунт» // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2023. № 1 (754). С. 52-63.

20. Морозов И.В., Кузнецов К.А. Разработка методики расчёта пиковых ударных нагрузок на опорные катки гусеничного шасси при преодолении единичных препятствий // Вестник Брянского государственного технического университета. 2023. № 2 (95). С. 33-41.

opornykh katkov gusenichnogo transporter v razlichnykh rezhimakh ekspluatatsii. *Problemy prochnosti i resursa mashin i konstruktsiy*, 2020, No. 1, pp. 112-120. (In Russian)

18. Petrov A.I., Sokolov D.A. Modelirovanie kontaktnogo vzaimodeystviya opornogo katka s gusenichnoy lentoy dlya otsenki nagruzok. *Transportnyye sistemy i tekhnologii*, 2022, Vol. 8, No. 2, pp. 89-101.

DOI: <https://doi.org/10.17816/transsyst20228289-101>. (In Russian)

19. Andreev P.S., Grigorev M.A. Chislennoe issledovanie vliyaniya skorosti dvizheniya na raspredelenie davleniya v sisteme «opornyy katok – gusenichnaya lenta – grunt». *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie*, 2023, No. 1 (754), pp. 52-63. (In Russian)

20. Morozov I.V., Kuznetsov K.A. Razrabotka metodiki rascheta pikovykh udarnykh nagruzok na opornye katki gusenichnogo shassi pri preodolenii edinichnykh prepyatstviy. *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2023, No. 2 (95), pp. 33-41. (In Russian)

УДК (УДК) 623.438

ВЛИЯНИЕ ПОДВИЖНОСТИ БРОНИРОВАННЫХ И НЕБРОНИРОВАННЫХ  
МАШИН НА ЗАЩИЩЕННОСТЬ ОТ ОСНОВНЫХ ВИДОВ НЕУПРАВЛЯЕМЫХ  
ПРОТИВОТАНКОВЫХ СРЕДСТВ ПОРАЖЕНИЯTHE INFLUENCE OF THE MOBILITY OF TRACKED VEHICLES ON PROTECTION  
FROM THE MAIN TYPES OF UNGUIDED ANTI-TANK WEAPONSНаказной И.О.<sup>1</sup>, Наказной О.А.<sup>2</sup>  
Nakaznoy I.O.<sup>1</sup>, Nakaznoy O.A.<sup>2</sup><sup>1</sup> – Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова (Москва, Россия)<sup>2</sup> – Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия)<sup>1</sup> – Dukhov Automatics Research Institute (Moscow, Russian Federation)<sup>2</sup> – Bauman Moscow State Technical University (Moscow, Russian Federation)

**Аннотация.** Условия ведения современных боевых действий формируют требования к применяемым и перспективным образцам техники. Одним из таких требований является высокий уровень подвижности на поле боя. Практическая польза данного способа защиты не вызывает сомнений, однако его теоретическая составляющая в настоящее время недостаточно развита. Известные на сегодняшний день методики оценки эффективности стрельбы по движущейся цели ограничены её скоростью движения до 25 км/ч. Возможности быстроходных гусеничных и колёсных машин кратко превосходят это значение скорости. В связи с изложенным задача исследования влияния подвижности быстроходных машин на защищённость представляется актуальной. С целью анализа поставленной задачи в работе предложена классификация ошибок стрельбы с учётом движения цели. Уточнена модель определения ошибок при стрельбе по движущейся цели. Для оценки эффективности подвижности на защищённость произведены расчеты ошибок стрельбы и определена вероятность попадания в цель первым выстрелом с применением данных из открытых источников для основных видов наземных неуправляемых противотанковых средств поражения. Такими средствами являются современные орудия гусеничных машин и ручные противотанковые гранатомёты. В работе рассмотрены три основных направления движения цели во время боя. Полученные результаты на базе усовершенствованной методики подтверждают эффективность увеличения подвижных свойств колёсных и гусеничных машин, что способствует формированию критериев к обеспечению подвижности перспективных образцов техники.

**Ключевые слова:** подвижность, защищённость, вероятность попадания, ошибки стрельбы, движущаяся цель.

**Дата получения статьи:** 27.04.2026  
**Дата принятия к публикации:** 22.05.2026  
**Дата публикации:** 25.06.2026

**Abstract.** The conditions of modern warfare form the requirements for the used and promising models of equipment. One of these requirements is a high level of mobility on the battlefield. The practical benefits of this method of protection are beyond doubt, however, its theoretical component is currently insufficiently developed. Currently known methods for evaluating the effectiveness of shooting at a moving target are limited to its speed of movement up to 25 km/h. The capabilities of high-speed tracked and wheeled vehicles exceed this speed value by several times. In connection with the above, the task of studying the effect of mobility of high-speed vehicles on security seems relevant. In order to analyze the task, the paper proposes a classification of shooting errors based on target movement. The model for determining errors when shooting at a moving target has been refined. To assess the effectiveness of mobility on security, firing errors were calculated and the probability of hitting the target with the first shot was determined, taking into account data from open sources for the main types of ground-based unguided anti-tank weapons. Such tools include modern tracked vehicles and hand-held anti-tank grenade launchers. Three main directions of target movement during combat are considered. The improved technique and the results obtained with its application confirm the effectiveness of increasing the mobility of wheeled and tracked vehicles, which contributes to the formation of requirements for ensuring the mobility of promising models of equipment.

**Keywords:** mobility, protection, probability of hitting, shooting mistakes, moving target.

**Date of manuscript reception:** 27.04.2026  
**Date of acceptance for publication:** 22.05.2026  
**Date of publication:** 25.06.2026



**Сведения об авторах:**

**Наказной Игорь Олегович** – инженер-конструктор 1-й категории конструкторско-технологического отдела, ФГУП «Всероссийский научно-исследовательский институт автоматике имени Н.Л. Духова» (ФГУП «ВНИИА»),  
*e-mail: igornakaznoy@mail.ru.*

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-8357-6024>

**Наказной Олег Алексеевич** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Многоцелевые гусеничные машины и мобильные роботы», ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» МГТУ им. Н.Э. Баумана, *e-mail: nakaznoi@bmsu.ru.*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4029-2434>

**Authors' information:**

**Igor O. Nakaznoy** – Design Engineer, Engineering and Design Department, Federal State Unitary Enterprise Dukhov Automatics Research Institute,  
*e-mail: igornakaznoy@mail.ru.*

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-8357-6024>

**Oleg A. Nakaznoy** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor, Department of Multi-Purpose Tracked Vehicles and Mobile Robots, Bauman Moscow State Technical University, *e-mail: nakaznoi@bmsu.ru.*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4029-2434>

## 1. Введение

Непрерывное развитие средств поражения бронемашин обуславливает постоянную необходимость в поиске путей обеспечения защитных свойств боевых машин. Наиболее известными путями повышения защищённости гусеничных машин являются: развитие броневых материалов и увеличение толщины броневых преград [1], применение средств маскировки [2], использование динамической защиты [3], оснащение машин комплексом оптико-электронного подавления [4] и комплексом активной защиты [5]. Для каждого из перечисленных способов повышения защищённости разработаны теоретические подходы, позволяющие оценить эффективность их применения [6].

## 2. Постановка задачи

В последнее время, особенно по опыту специальной военной операции, возросло влияние подвижности, как фактора, оказывающего влияние на защищённость. Значимость этого фактора не вызывает сомнений, однако методы его оценки не развиты. В связи с этим целью настоящего исследования поставлена оценка влияния быстроходности цели на её защищённость от воздействия основных видов противотанковых неуправляемых боеприпасов.

Известно, что в процессе стрельбы из любого вида вооружений возникают случайные ошибки [7], которые поддаются нор-

альному закону распределения. Эти ошибки являются причиной отклонения снаряда от точки прицеливания. При ведении огня по движущейся цели возникают дополнительные ошибки стрельбы. На сегодняшний день получены значения ошибок стрельбы, ограниченные скоростью цели до 25 км/ч [8]. Сравним ошибки стрельбы между неподвижной и движущейся целью для указанной скорости. Курсовой угол примем 45°. В качестве орудия стрельбы зададимся данными современного образца 120-мм пушки гусеничной машины со снарядом КЕ [9]. Дальность стрельбы – 2000 м, что сопоставимо с дистанцией прямого выстрела. На примере суммарных отклонений представим данные как для глазомерного способа определения поправок на движение цели, так и с использованием автоматизированной системы управления огнём (рис.1).

Анализ данных рис. 1 подтверждает значимость влияния подвижности на защищённость. В данном примере ошибки стрельбы по движущейся цели превышают более чем в полтора раза ошибки стрельбы по неподвижной цели.

Предложенная ранее декомпозиция ошибок стрельбы не учитывает движение цели [10]. В связи с этим автор предлагает усовершенствованную классификацию ошибок стрельбы из неподвижного источника поражающего воздействия как по неподвижной цели, так и по движущейся.

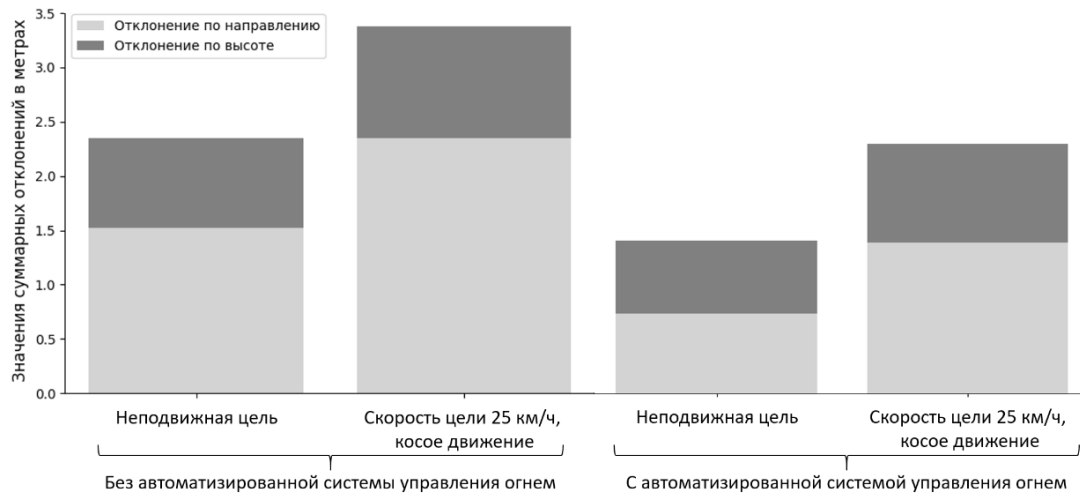


Рис. 1. Диаграмма ошибок стрельбы 120-мм снарядом КЕ на дальности 2000 м по неподвижной и движущейся цели

Большинство современных боевых машин оснащены автоматизированной системой управления огнем. В связи с этим применение глазомерного способа определения и внесения поправок на движение цели актуально при выходе из строя автоматизированная система управления огнем, либо для других видов противотанковых средств, таких как ручной противотанковый гранатомет. Определим относительные величины основных источников ошибок для стрельбы из 120-мм пушки без применения автоматизированная система управления огнем. Рассмотрим случай неподвижной цели и движущейся по указанным ранее исходным данным. Представим суммарные отклонения и их составляющие в виде круговой диаграммы (рис. 2). Условные обозначения на рисунке:  $E_{y_n}$  – срединная ошибка наведения по высоте при стрельбе с места по неподвижной цели;  $E_{y_{мб}}$  – срединная ошибка определения и учёта поправок на отклонение метеобаллистических условий от нормальных по высоте;  $B_{\sigma}$  – срединное отклонение рассеивания снарядов по высоте;  $E_{y_m}$  – срединная ошибка технической подготовки по высоте;  $E_{y_0}$  – срединная ошибка определения и учёта дальности до цели по высоте;  $E_{y_{ВПР}}$  – срединная ошибка определения и назначения исходных установок на движение

цели по высоте;  $E_{y_{нд}}$  – срединная ошибка наведения по высоте при стрельбе с места по движущейся цели;  $B_y$  – суммарное срединное отклонение снарядов по высоте;  $B_{y_{оц}}$  – суммарное срединное отклонение при стрельбе по движущейся цели по высоте;  $E_{z_n}$  – срединная ошибка наведения по боковому направлению при стрельбе с места по неподвижной цели;  $E_{z_{кр}}$  – срединная ошибка определения и учёта поправок на крен машины по боковому направлению;  $B_{\sigma}$  – срединное отклонение рассеивания снарядов по направлению;  $E_{z_m}$  – срединная ошибка технической подготовки по боковому направлению;  $E_{z_{мб}}$  – срединная ошибка определения и учёта поправок на отклонение метеобаллистических условий от нормальных по высоте;  $E_{z_{но}}$  – срединная ошибка наведения по боковому направлению при стрельбе с места по движущейся цели;  $E_{z_{ВПН}}$  – срединная ошибка определения и назначения исходных установок на движение цели по боковому направлению;  $B_z$  – суммарное срединное отклонение снарядов по направлению;  $B_{z_{оц}}$  – суммарное срединное отклонение при стрельбе по движущейся цели по направлению.

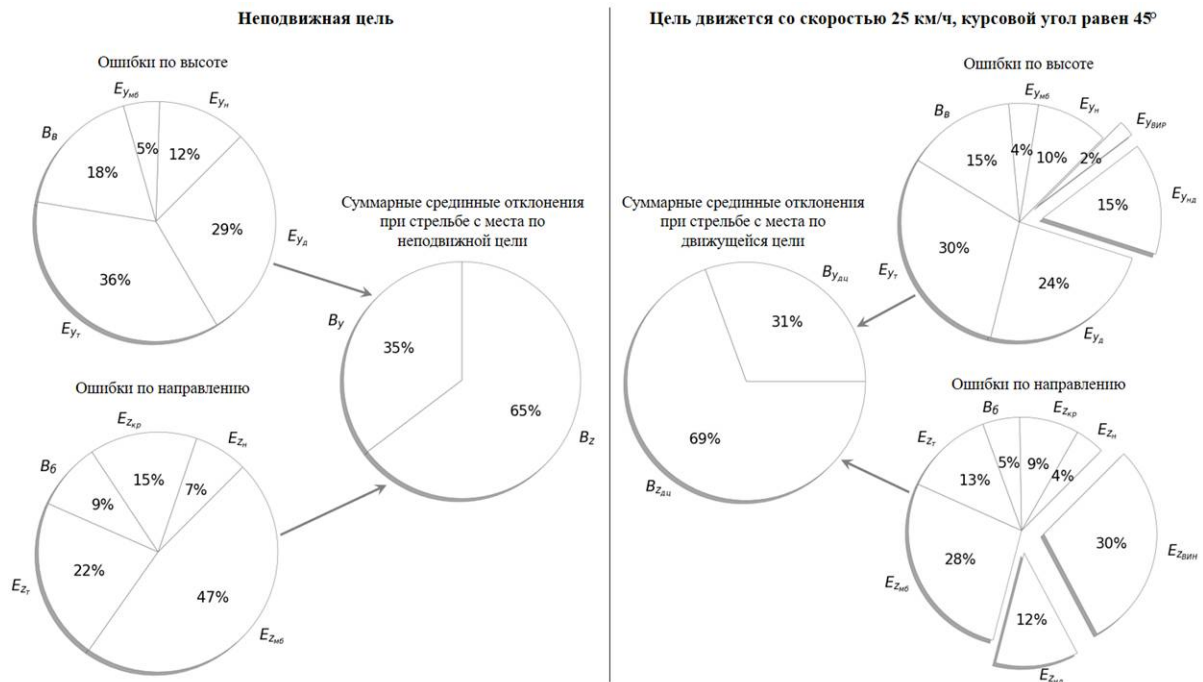


Рис. 2. Сравнительный анализ значений ошибок стрельбы при ведении огня как по неподвижной цели, так и по движущейся 120-мм снарядом КЕ на дальности 2000 м без использования автоматизированной системы управления огнём

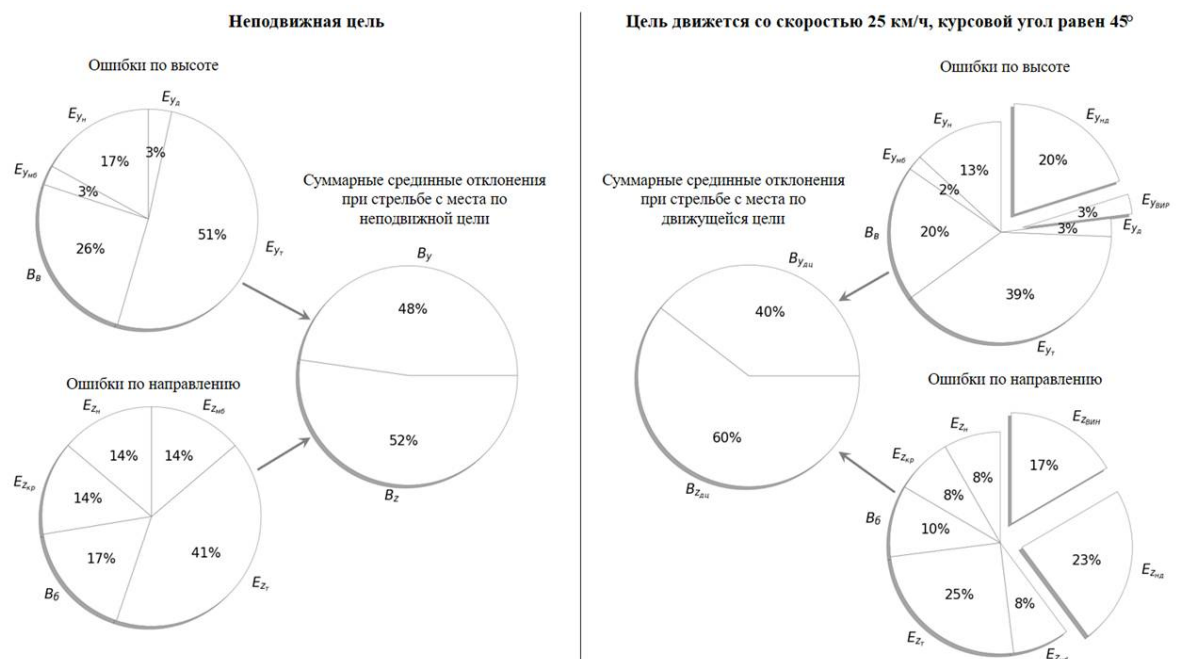


Рис. 3. Сравнительный анализ значений ошибок стрельбы при ведении огня как по неподвижной цели, так и по движущейся 120-мм снарядом КЕ на дальности 2000 м с применением автоматизированной системы управления огнём

По аналогии с рис. 2 определим относительный вклад ошибок стрельбы в отклонение для гусеничных машин с автоматизированной системой управления огнём (рис. 3).

Основной вклад в увеличение ошибок происходит за счёт ошибки, возникающей в процессе сопровождения цели (рис. 2). Ошибки, появляющиеся в результате определения и учёта величин поправок на движе-

ние цели в боковом направлении также играют существенную роль. Сравнивая рис. 2 и рис. 3, видно перераспределение относительного вклада ошибок на отклонение стрельбы. Это достигается благодаря таким элементам автоматизированная система управления огнем, как лазерный дальномер, баллистический вычислитель, механизмы выработки поправок на движение самой машины  $\Delta D$  и на движение цели  $\Delta \beta$ , прицелы со стабилизированной линией прицеливания. Эти компоненты позволяют вести более точный огонь, значение суммарных ошибок снижается на 60% в сравнении с объектом без этой системы, что заметно из рис. 1. Полученные данные согласуются с работой [11]. Тем не менее, даже с применением автоматизированная система управления огнем, движение цели способствует увеличению отклонений боеприпаса, а значит позволяет увеличить защищенность машины.

Необходимо отметить, что эффект возрастания рассеивания снаряда от скорости движения цели по значениям ошибок стрельбы не дает полного ответа о влиянии на конечный результат оценки на защищенность цели. Это связано с тем, что эллипс рассеивания снаряда необходимо сопоставлять с размерами проекции цели с учётом дальности ведения огня. В связи с этим прием иной критерий – вероятность попадания. В соответствии с основными положениями боевых наставлений стран НАТО выдвигается требование поражения цели первым выстрелом. Поэтому прием в качестве критерия оценки защищенности гусеничной машины вероятность попадания в цель первым выстрелом. Соответственно, чем ниже будет показатель вероятности попадания, тем выше уровень защищенности. Примем, что направление движения цели носит наступательный характер. Тогда цель движется в пределах от фронтального до флангового направлений. Движение осуществляется на плоскости, без учёта естественного рельефа и заграждений. То есть цель открыта и находится в поле видимости на протяжении всех этапов стрельбы. Средство поражения ведет огонь с места из неизменного местоположения.

### 3. Математическая модель

Согласно математической модели современной теории стрельбы [8] вероятность попадания в цель первым выстрелом  $P$  определяется в виде приведенной функции Лапласа  $\Phi(\beta)$  и записывается следующим образом:

$$P = \Phi \left( \frac{\frac{1}{2} m \sqrt{K_\phi}}{B_{\text{он}}} \right) \cdot \Phi \left( \frac{\frac{1}{2} H_y \sqrt{K_\phi}}{B_{\text{ен}}} \right), \quad (1)$$

где  $B_{\text{он}}$  и  $B_{\text{ен}}$  – суммарные ошибки стрельбы по направлению и высоте соответственно;  $m$  – ширина видимого размера цели;  $H_y$  – высота цели;  $K_\phi$  – коэффициент фигурности цели.

Формула (1) справедлива при стрельбе по настильной траектории. В случае ведения огня по навесной траектории пользуются величиной дальности поражаемого участка  $l$  и суммарными ошибками по дальности  $B_{\text{он}}$ :

$$P = \Phi \left( \frac{\frac{1}{2} m \sqrt{K_\phi}}{B_{\text{он}}} \right) \cdot \Phi \left( \frac{\frac{1}{2} l \sqrt{K_\phi}}{B_{\text{он}}} \right). \quad (2)$$

В общепринятой модели стрельбы приняты допущения, упрощающие процесс определения и подготовки данных, необходимых при назначении исходных установок стрельбы. Это приемлемо в случае подготовки данных для ведения огня, но может привести к значимым ошибкам в случае анализа влияния подвижности цели на её защищенность. В связи с вышесказанным авторы предлагают уточнить и дополнить существующую модель стрельбы в части курсового угла, проекции цели, коэффициента фигурности, ошибок наведения и сопровождения цели/

#### 3.1. Уточнение курсового угла

При стрельбе по движущейся цели необходимо осуществлять вынос точки прицеливания по направлению движения цели. Данный процесс требует решения задачи встречи снаряда с целью, что достигается определением и учётом поправок на величину из-

менения расстояния  $ВИР_{ц}$  и на величину изменения направления  $ВИН_{ц}$ . Существующая методика предполагает, что курсовой угол цели  $q_{ц}$  неизменен с момента её обнаружения. Это не соответствует действительности и применимо только в случае фронтального движения. В связи с этим возникают противоречия в определении поправок на движение цели. Избежать этих противоречий поможет ввод дополнительной переменной, учитывающее изменение курсового угла цели в момент совершения выстрела  $q_p$ .

### 3.2. Уточнение длины проекции цели

Определение вероятности попадания в цель требует учёта её размеров. В классической методике размер ширины цели  $m$  учитывается только в момент определения курсового угла цели  $q_{ц}$ . В связи с этим формула определения величины видимого размера цели по ширине определяет ширину проекции цели только в начальный момент подготовки к стрельбе. При стрельбе по неподвижной цели ширина  $m$  не меняется. Однако при оценке ведения огня по движущейся цели ширина видимого размера цели будет отличаться от исходной. Это означает, что ширина проекции цели по отношению к наводчику может меняться в зависимости от фактического курсового угла. Поэтому при определении вероятности попадания необходимо использовать размеры проекции цели в момент встречи снаряда с плоскостью цели. Для этого введем дополнительный параметр – курсовой угол в момент встречи снаряда с целью  $q_в$ . Шириной цели является проекция длины объекта на вертикальную плоскость,  $L_{ц}$ . Схема определения  $L_{ц}$  на виде сверху представлена на рис. 4.

Как видно из рис. 4, длина проекции цели  $L_{ц}$  определяется по отношению к наводчику и в случае движения цели она различна в каждый момент времени, даже при прямолинейном движении цели.

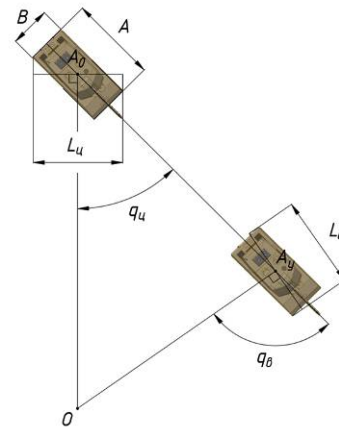


Рис. 4. Схема определения длины проекции цели

### 3.3. Уточнение коэффициента фигурности

При учёте фигурности цели, как правило, пользуются стандартными таблицами с конкретными образцами техники. Однако перечень объектов в этих таблицах весьма ограничен и могут возникать ситуации, когда необходимо определить коэффициент фигурности  $K_{ф}$  объекта. Кроме того, коэффициент фигурности зависит от ракурса цели. Однако в расчётах обычно применяют единый коэффициент фигурности для всех углов встречи снаряда с целью, то есть не учитывается фактический курсовой угол цели в момент встречи со снарядом  $q_в$ . Для определения  $K_{ф}$  неизвестного объекта предлагается использовать проекцию цели на основе трехмерной модели. Определение коэффициента фигурности рассчитывается отношением фактической площади цели к площади описанного прямоугольника цели к в вертикальной плоскости (рис. 5).

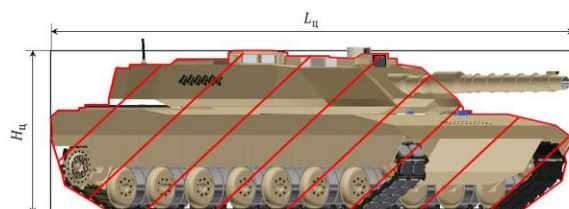


Рис. 5. Пример определения коэффициента фигурности

Проведём вычисления для фронтального и флангового расположения гусеничной ма-

шины, а также для курсового угла  $45^\circ$ . Полученные данные сведём в табл. 1.

Таблица 1  
Коэффициент фигурности

Значение курсового угла встречи $q_\theta$	Значение коэффициента фигурности $K_\phi$
$0^\circ$	0,747
$45^\circ$	0,790
$90^\circ$	0,765

Анализируя табл. 1, можно сделать вывод, что различие коэффициентов фигурности для выбранной цели, составляет до 6%. Так как фактический курсовой угол в момент совмещения снаряда с целью будет отличаться от курсового угла  $q_u$ , а для каждого угла в отдельности определять коэффициент фигурности графическим способом нецелесообразно ввиду малого различия значений коэффициента. В связи с этим предлагается ввести условие:

$$K_\phi(q_\theta) = \begin{cases} 0,790; & 15^\circ < q_\theta < 75^\circ \\ 0,747; & 0^\circ \leq q_\theta \leq 15^\circ \\ 0,765; & 75^\circ \leq q_\theta \leq 90^\circ \end{cases}$$

Таким образом принятые в существующей методике допущения о неизменном значении коэффициента фигурности цели могут приводить к погрешности свыше 5%. Учёт изменения  $K_\phi$  позволит повысить точность вычислений вероятности попадания.

#### 3.4. Уточнение ошибок наведения по неподвижной цели

Существующая методика теории стрельбы не учитывает ошибки наведения при ведении огня с места по неподвижной цели. В работе [8], посвящённой анализу ошибок стрельбы, отмечается, что при стрельбе с места по неподвижной цели ошибки наводки по высоте и направлению равны, соответственно,

$$E_{z_n} = 0,1 \text{ т.д. и } E_{y_n} = 0,1 \text{ т.д.}$$

Сравнивая эти срединные ошибки наводки с величинами технического рассеивания  $B_\sigma$  и  $B_\theta$ , порядка 0,3 т.д., авторы заключают,

что основной вес имеют ошибки, не зависящие от стрелка (наводчика, оператора). На основании этого делается вывод о том, что ошибками наводки можно пренебречь в связи с их малостью по отношению к техническому рассеиванию. Необходимо обратить внимание, что эти результаты получены на основании исследования стрельбы из 100-мм пушки. Однако проведенный в настоящем исследовании анализ показал, что в действительности этот вывод не всегда верен, тем более в случае применения более современного вооружения. В дополнение к этому целесообразно отметить, что в связи с увеличением дальностей стрельбы, даже ошибку 0,1 т.д. уже нельзя считать малой и пренебрегать её учётом, так как на дальностях прямого выстрела бронебойным подкалиберным снарядом в абсолютных величинах эта ошибка составляет порядка 0,2 м на дистанции 2000 м, что сопоставимо со значениями технического рассеивания современных ствольных орудий быстроходной гусеничной техники.

#### 3.5. Уточнение ошибок наведения по движущейся цели

Математическая модель теории стрельбы предлагает использовать коэффициент увеличения рассеивания для учёта возрастания ошибок стрельбы по движущейся цели. Данный коэффициент применим к техническому рассеиванию снарядов. Получается, что движение цели влияет на параметры самого орудия. При стрельбе с места влияние перечисленных факторов отсутствует. Воздействие на техническое рассеивание при неизменном угле возвышения происходит, в основном, за счёт привода поворота башни и стабилизатора линии прицеливания. Основной причиной увеличения рассеивания снарядов при стрельбе по движущейся цели является необходимость её сопровождения в процессе подготовки исходных данных для стрельбы. Это удержание производится наводчиком при помощи прицельного приспособления, после чего данные поступают в баллистический вычислитель, либо сопровождение цели учитывается глазомерно.

На сегодняшний день значения коэффициентов рассеивания приведены для скорости движения цели до 25 км/ч. Современные образцы бронированной техники способны значительно быстрее передвигаться. В некоторых работах говорится о необходимости увеличения скорости движения перспективных боевых машин до 160 км/ч [12]. Поэтому, чтобы определить возрастание ошибок удержания цели, необходимо их выразить

через коэффициенты увеличения рассеивания и аппроксимировать данные для скоростей свыше 25 км/ч. Результаты такой аппроксимации линейной зависимостью приведены в табл. 2, где  $y$  – ошибка сопровождения и удержания цели на прицельной марке или центральном угольнике прицельного приспособления, а  $x$  – скорость движения цели.

Таблица 2

Результаты аппроксимации ошибок наведения

$q_{ц}$	Ошибка наведения	Выражение, т.д.	Среднеквадратичная ошибка
0°	$E_{y_{нд}}$	$y = 0,018x$	$R^2 = 0,9408$
	$E_{z_{нд}}$	$y = 0,0294x$	$R^2 = 0,9671$
45°	$E_{y_{нд}}$	$y = 0,0209x$	$R^2 = 0,9599$
	$E_{z_{нд}}$	$y = 0,0371x$	$R^2 = 0,9424$
90°	$E_{y_{нд}}$	$y = 0,0226x$	$R^2 = 0,9505$
	$E_{z_{нд}}$	$y = 0,0446x$	$R^2 = 0,9248$

Полученные данные позволяют учитывать среднюю ошибку наведения как функцию от скорости движения цели, т.е.  $E = k(V)$ . В данном случае  $k$  – линейный коэффициент. Аппроксимация зависимостей из табл. 2 позволит определить значение

ошибки наведения по движущейся цели при заданном курсовом угле и фиксированной скорости движения цели, отличных от значений в таблице. Полученная трёхмерная поверхность ошибок представлена на рис. 6.

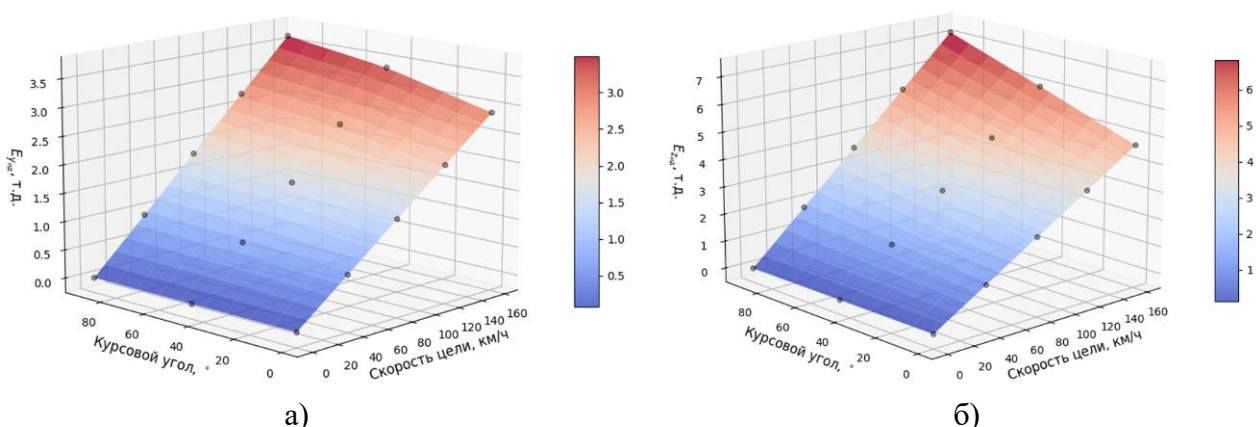


Рис. 6. Поверхность ошибок наведения по движущейся цели;  
 а) по высоте; б) по направлению

### 3.6. Анализ эффективности уточненной методики

Определим разность вероятностей попадания в цель первым выстрелом 120-мм снарядом между усовершенствованной методикой и методикой без доработок при глазо-

мерном способе определения поправок на движение цели (рис. 7). Как видно из рис. 7, с возрастанием скорости движения цели на дальностях в пределах прямого выстрела имеются расхождения в результатах расчётов вероятности попадания. При неподвижной цели расхождение минимально. С возрастанием скорости расхождение результатов расчёта достигает значения более 16% на

дальности 500 м при движении цели со скоростью 100 км/ч. С увеличением расстоянием до цели уменьшается расхождение в результатах расчёта. Таким образом, усовершенствованная модель позволяет повысить точность вычислений, особенно при исследовании влияния движения цели на её защищённость.

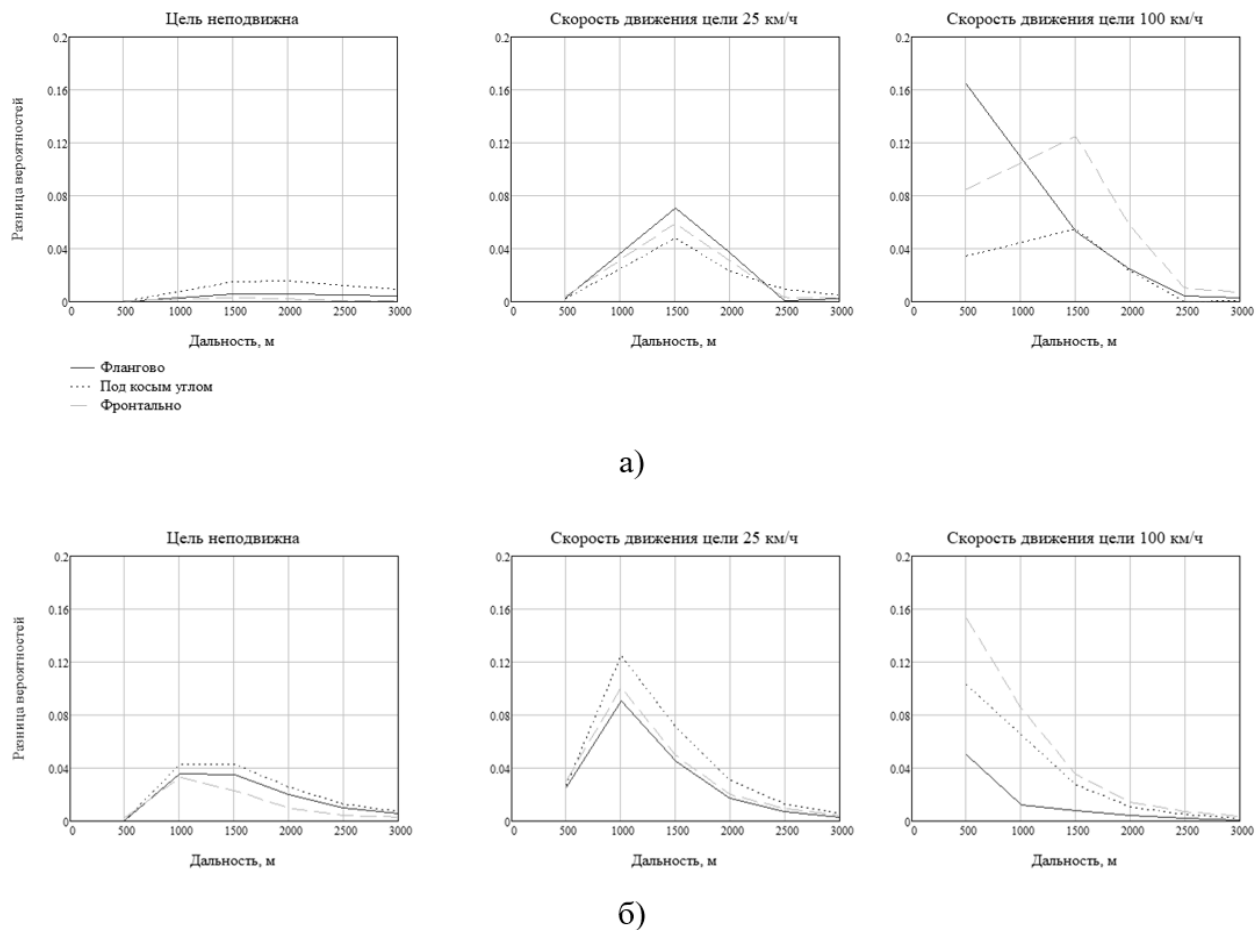


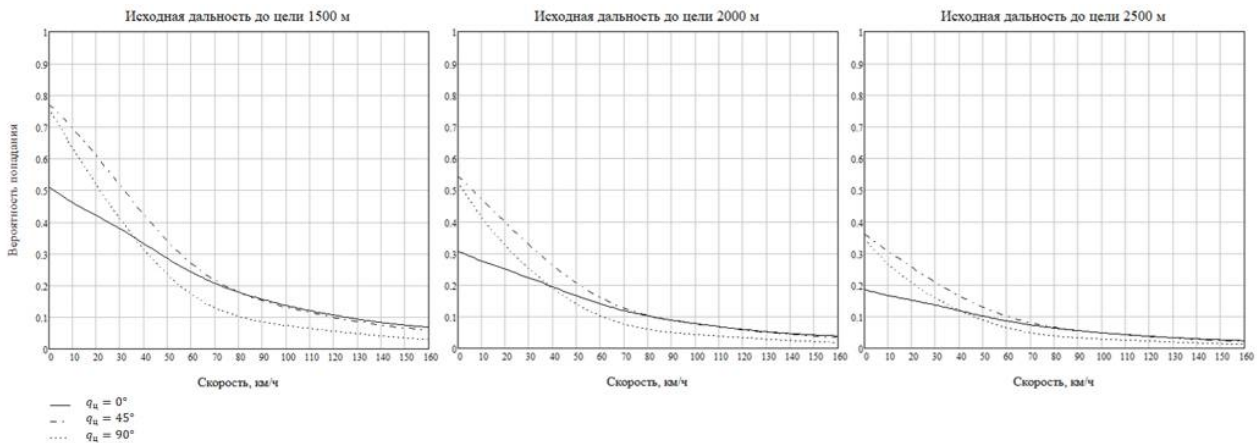
Рис. 7. Разность вероятностей попадания в цель при расчетах по усовершенствованной и существующей методикам на примере 120-мм снарядов:  
 а) снаряд KE; б) снаряд MZ

#### 4. Результаты и их анализ

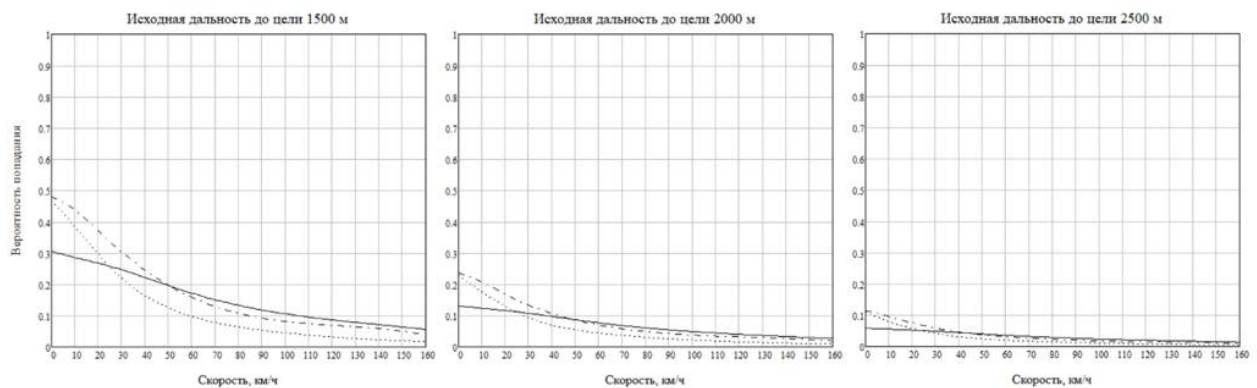
С учётом доработанной методики определим влияние скорости на вероятность попадания в цель. В качестве орудия примем 120-мм пушку западного образца [9, 13], а размеры цели аналогичные машине M1 Абрамс. Рассмотрим попадание с учётом трех основных направлений движения цели, то есть при фланговом, фронтальном и косом

направлениях. Скорость цели, с учётом возможностей перспективных образцов техники, примем до 160 км/ч.

Представим зависимость в виде  $P(V)$ , огонь ведется на трёх исходных дальностях 1500 м, 2000 м и 2500 м, автоматизированная система управления огнем выключена или отсутствует, результаты отобразим на рис. 8.



а)



б)

Рис. 8. Зависимость вероятности попадания от скорости движения цели без использования автоматизированной системы управления огнём:  
а) снаряд КЕ; б) снаряд МЗ

Из рис. 8 видно, что вероятность попадания кумулятивным снарядом МЗ значительно меньше в сравнении с бронебойным подкалиберным КЕ. Данный факт известен и подтверждён на практике, а его физическая сущность объясняется относительно низкой начальной скоростью и высоким баллистическим коэффициентом [14].

По принятым ранее исходным данным определим вероятность попадания при

стрельбе с использованием автоматизированной системой управления огнём. Полученные зависимости представим на рис. 9.

Таким образом, результаты анализа показывают, что защитные свойства цели существенно повышаются при увеличении скорости движения. Этот тезис справедлив как при стрельбе с использованием автоматизированных систем, так и без них.

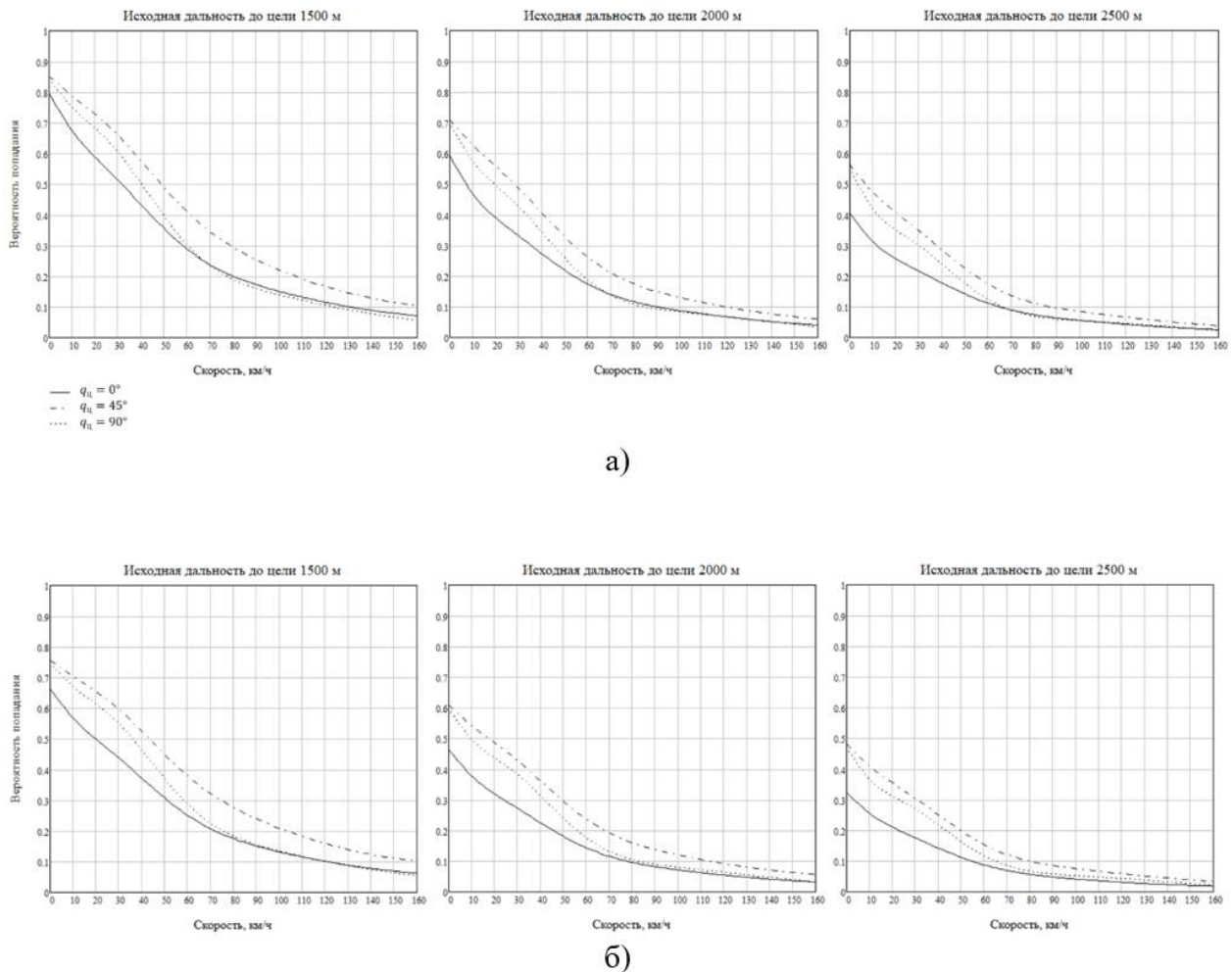


Рис. 9. Зависимость вероятности попадания от скорости движения цели с учётом применения автоматизированной системы управления огнём:  
 а) снаряд КЕ; б) снаряд МЗ

Применение ручных противотанковых гранатометов носит массовый характер в виду их распространенности, дешевизны, низких требований к квалификации стрелка. Главным недостатком гранатометов является небольшая дальность выстрела. Как правило, дальность стрельбы из ручного противотанкового гранатомета составляет порядка 300 м. Это предположительно может привести к нивелированию возможности повышения защищённости за счёт подвижности цели. Исследуем этот вопрос. Рассмотрим влияние движения быстроходной гусеничной машины на эффективность попадания в него из гранатомета на примере данных в источниках [15-17]. Результаты расчёта показаны на рис. 10.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что за счёт подвижности цели может

быть снижена вероятность попадания в неё из ручного противотанкового гранатомета. Особенно это ярко проявляется, когда цель движется флангово.

К неуправляемым сухопутным противотанковым средствам поражения, помимо рассмотренных ранее, можно отнести и самоходные артиллерийские установки. Стрельба из них преимущественно осуществляется по навесной траектории. При расчёте эффективности следует применять выражение (2). Расчёт вероятности попадания должен происходить согласно теории стрельбы из наземной артиллерии [18, 19]. В этом случае появляются источники ошибок, присущие данному способу ведения огня. Даже с учётом полной подготовки стрельбы вероятность попадания в точечную цель крайне мала.

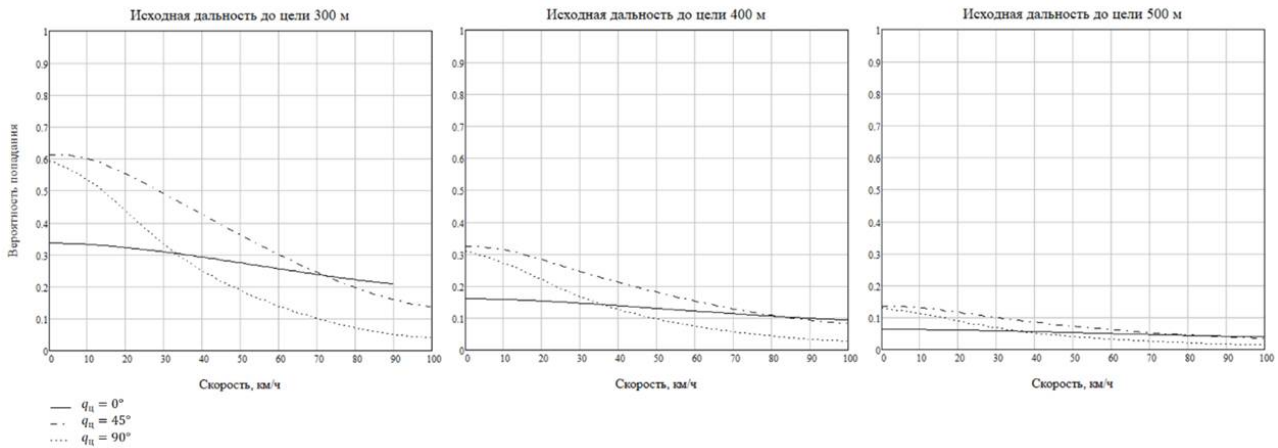


Рис. 10. Зависимость вероятности попадания от скорости движения цели при стрельбе из противотанкового гранатомета

Это наглядно продемонстрировано зависимостью вероятности попадания от дальности ведения огня по неподвижной цели на рис. 11.

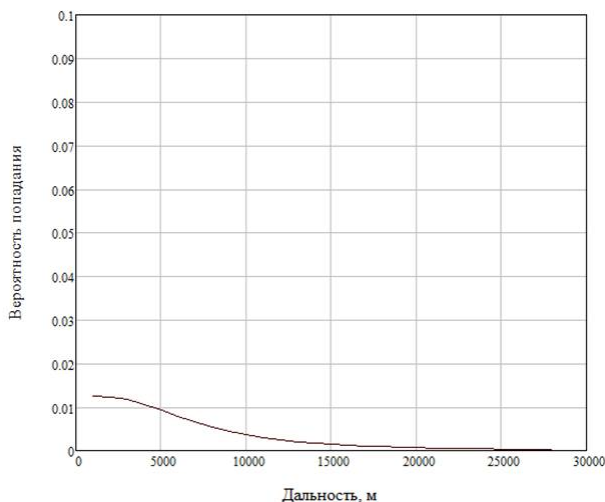


Рис. 11. Зависимость вероятности попадания от дальности ведения огня из артиллерийской системы в неподвижную цель при стрельбе не прямой наводкой

Ввиду малого значения вероятности попадания точечным выстрелом, в артиллерии принято оценивать эффективность стрельбы нормой расхода снарядов. При этом обычно огонь ведется не по конкретной цели, а по скоплению целей или групповой цели. Огневая задача решается, как правило, не одиночным орудием, а подразделением. При этом в большинстве случаев поражение идет не за счёт точного попадания в технику, а за счёт осколочно-фугасного воздействия сна-

ряда. Для бронированных целей, при стрельбе 155-мм осколочно-фугасным снарядом, как правило, при разрыве ближе 10 м, цель считается поражённой. Поэтому эффективность стрельбы не прямой наводкой оценивается по характеристикам площади поражения – накрытию цели. Ввиду этого, для повышения защищённости цели требуется выход из зоны поражения за время полета снаряда. Известно, что значения средних ошибок при стрельбе из самоходных артиллерийских установок составляет порядка 1% от дальности стрельбы. По направлению это значение примерно равно 4 тысячным. Данные справедливы для полной подготовки стрельбы. Учёт огневого воздействия остальных орудий из батареи можно вести посредством коэффициента рассеивания, который возникает в результате пристрелки. Таким образом, образуется зона поражения, выйдя за пределы которой снижается вероятность попадания в цель. Исходя из этого, в первом приближении можно оценить влияние движения цели на её защищённость через вероятность попадания в зону вокруг цели. При увеличении скорости до допустимых значений для современных машин, даже при допущении о линейном законе увеличения ошибки, вероятность поражения ожидаемо снизится в два-три раза, а с учётом действия нормального закона, это приведёт к ещё большему уменьшению вероятности попадания (поражения). Ещё сильнее это влияние проявится, если использовать маневрирование, т.к. в соответствии с рассмотренными

правилами стрельбы, подготовка исходных данных ведётся в предположении, что известен маршрут движения цели.

Таким образом, подвижность образца позволяет существенно снизить вероятность накрытия его огнём артиллерии.

## 5. Заключение

Предложенная усовершенствованная модель стрельбы позволяет повысить точность расчёта вероятности попадания по движущимся целям.

Подвижность цели существенно повышает её защищённость от всех видов наземных

### Список литературы

1. Григорян В.А., Белобородко А.Н., Дорохов Н.С. Частные вопросы конечной баллистики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 591 с.

2. Королёв А.Ю., Королёва А.А., Яковлев А.Д. Маскировка вооружения, техники и объектов. СПб: Университет ИТМО, 2015. 155 с.

3. Купрюнин Д.Г., Дорохов Н.С., Чистяков Е.Н. Динамическая защита вчера, сегодня, завтра // Техника и вооружение вчера, сегодня, завтра. 2014. № 9. С. 5-11.

4. Евдокимов В.И., Гуменюк Г.А., Андрищенко М.С. Неконтактная защита боевой техники. СПб: Реноме, 2009. 174 с.

5. Степанов В.В., Андрищенко М.С., Борисов Е.Г. Методы и средства защиты бронетехники. СПб: Реноме, 2017. 311 с.

6. Степанов В.В., Андрищенко М.С., Евдокимов В.И. Современные противотанковые средства. СПб: Реноме, 2016. 195 с.

7. Наставление по стрельбе из танков. Основы стрельбы из танков. М.: Воениздат, 1970. 135 с.

8. Романов Н.И. Теория стрельбы из танков. М.: ВА БТВ, 1973. 423 с.

9. Schusstafel der 120 mm Kanone KE [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://www.kotsch88.de/tafeln/st\\_120mm-ke.htm](https://www.kotsch88.de/tafeln/st_120mm-ke.htm) (дата обращения: 26.04.2026).

10. Голуб Г.Г., Заславский Е.И., Лукьянов Н.А. Классификация ошибок стрельбы из танка. Оценка влияния групп ошибок на вероятность попадания // Вопросы оборон-

противотанковых средств при стрельбе неуправляемыми боеприпасами.

Основной вклад подвижности машины в повышение её защищённости вносится через увеличение ошибок стрельбы. То есть за счёт увеличения ошибок удержания цели в прицельном приспособлении и за счёт увеличения ошибок определения и назначения поправок на упреждение цели. Наиболее значительно влияние подвижности на защищённость проявляется при фланговом движении цели.

### References

1. Grigoryan V.A., Beloborodko A.N., Dorokhov N.S. *Chastnie voprosi konechnoi ballistiki* [Questions on Final Ballistics]. Moscow, BMSTU Publ., 2006. 591 p. (In Russian)

2. Korolyov A.Yu., Korolyova A.A., Yakovlev A.D. *Maskirovka vooruzheniya, tekhniki i obektov* [Camouflage of weapons, equipment and objects]. Saint Petersburg, ITMO University Publ., 2015. 155 p. (In Russian)

3. Kupryunin D.G., Dorokhov N.S., Chistyakov E.N. Dynamic protection yesterday, today, tomorrow. *Tekhnika i vooruzhenie vchera, segodnya, zavtra*, 2014, No. 9, pp. 5-11 (In Russian)

4. Yevdokimov V.I., Gumenyuk G.A., Andryushchenko M.S. *Nekontaktная zashchita boevoi tekhniki* [Non-contact protection of military equipment]. Saint Petersburg, Renome Publ., 2009. 174 p. (In Russian)

5. Stepanov V.V., Andryushchenko M.S., Borisov Ye.G. *Metodi i sredstva zashchiti bronetekhniki* [Methods and means of protection of armored vehicles]. Saint Petersburg, Renome Publ., 2017. 311 p. (In Russian)

6. Stepanov V.V., Andryushchenko M.S., Yevdokimov V.I. *Sovremennye protivotankovie sredstva* [Modern anti-tank weapons]. Saint Petersburg, Renome Publ., 2016. 195 p. (In Russian)

7. *Nastavlenie po strelbe iz tankov. Osnovi strelbi iz tankov* [The tank shooting manual. The basics of tank shooting]. Moscow, Voennyizdat Publ., 1970. 135 p. (In Russian)

8. Romanov N.I. *Teoriya strelbi iz tankov*

- ной техники. 1973. Серия XX. Выпуск 37. С. 3-10.
11. Иванов И.К., Лаврищев Б.П., Потемкин Э.К., Соколов В.Я. Основные факторы, влияющие на точность стрельбы из танка // Вестник бронетанковой техники. 1980. № 2. С. 7-9.
12. Григорян В.А., Юдин Е.Г., Терехин И.И. Защита танков. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. 326 с.
13. Schusstafel der 120 mm Kanone MZ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://www.kotsch88.de/tafeln/st\\_120mm-mz.htm](https://www.kotsch88.de/tafeln/st_120mm-mz.htm) (дата обращения: 26.04.2026).
14. Иванов И.К., Карабанова Н.В., Кузнецов В.С., Лаврищев Б.П. Точность стрельбы кумулятивными снарядами // Вестник бронетанковой техники. 1986. № 2. С. 7-10.
15. Tradoc bulletin 3. Soviet RPG-7 anti-tank grenade launcher [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://djvu.online/file/9DnMiPiWbHuTm?ysclid=md61t97nao416730916> (дата обращения: 26.04.2026).
16. Anderson D., Thomson D. Analyzing helicopter evasive maneuver effectiveness against rocket-propelled grenades // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2014. Vol. 37 (1). P. 277-289.
17. Манышев В.В., Тактическая подготовка. М.: КноРус, 2024. 399 с.
18. Дагадаев М.М., Коростелев Е.В., Комьяженко Г.А., Северов Т.П. Стрельба наземной артиллерии. М.: Воениздат, 1960. 342 с.
19. Блинов Г.И. Теория стрельбы наземной артиллерии. Кн. 1. М.: Воениздат, 1960. 536 с.
- [Tank shooting theory]. Moscow, Akad. Publ., 1973. 423 p. (In Russian)
9. Schusstafel der 120 mm Kanone KE. Available at: [https://www.kotsch88.de/tafeln/st\\_120mm-ke.htm](https://www.kotsch88.de/tafeln/st_120mm-ke.htm)
10. Golub G.G., Zaslavskii E.I., Lukyanov N.A. Classification of tank firing mistakes. Assessment of the impact of mistake groups on the probability of a hit. *Voprosi oboronnoi tekhniki*, 1973, Ser. XX, Vol. 37, pp. 3-10. (In Russian)
11. Ivanov I.K., Lavrishchev B.P., Potemkin E.K., Sokolov V.Ya. The main factors influencing the accuracy of tank fire. *Vestnik bronetankovoi tekhniki*, 1980, No. 2, pp. 7-9. (In Russian)
12. Grigoryan V.A., Yudin E.G., Terekhin I.I. *Zashchita tankov* [Tank protection]. Moscow, BMSTU Publ., 2007. 326 p. (In Russian)
13. Schusstafel der 120 mm Kanone MZ. Available at: [https://www.kotsch88.de/tafeln/st\\_120mm-mz.htm](https://www.kotsch88.de/tafeln/st_120mm-mz.htm)
14. Ivanov I.K., Karabanova N.V., Kuznetsov V.S., Lavrishchev B.P. Accuracy of firing with high explosive anti-tank round. *Vestnik bronetankovoi tekhniki*, 1986, No. 2, pp. 7-10 (In Russian)
15. Tradoc bulletin 3. Soviet RPG-7 anti-tank grenade launcher. Available at: <https://djvu.online/file/9DnMiPiWbHuTm?ysclid=md61t97nao416730916>
16. Anderson D., Thomson D. Analyzing helicopter evasive maneuver effectiveness against rocket-propelled grenades. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2014, Vol. 37 (1), pp. 277-289.
17. Manishev V.V. *Takticheskaya podgotovka* [Tactical training]. Moscow, KnoRus Publ., 2024. 399 p. (In Russian)
18. Dagadaev M.M., Korostelev E.V., Komyazhenko G.A., Severov T.P. *Strelba nazemnoi artillerii* [Land artillery firing]. Moscow, Voenizdat Publ., 1960. 342 p. (In Russian)
19. Blinov G.I. *Teoriya strelbi nazemnoi artillerii. Kn. 1* [The theory of firing land artillery. Book 1]. Moscow, Voenizdat Publ., 1960. 536 p. (In Russian)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ СЕРВИСНЫХ ОПЕРАЦИЙ В  
БАНКОВСКОЙ СИСТЕМЕ НА ОСНОВЕ FLEXSIMSIMULATION AND OPTIMIZATION OF SERVICE OPERATIONS IN A BANKING  
SYSTEM BASED ON FLEXSIM

Умека Б.Дж., Дагва И.М., Угеоке И.Б., Нурудин А.Х.  
Julius Bettluwhobel Umeka, Dagwa Ishaya Musa, Iyenagbe Benjamin Ugheoke,  
Abdulhakeem Hassan Nurudeen

Университет Абуджи (Абуджа, Нигерия)  
University of Abuja (Abuja, Nigeria)

**Аннотация.** В данном исследовании применяется метод моделирования для решения проблемы очередей с целью повышения качества обслуживания в банковской системе Нигерии. Для исследования использовались данные, полученные в банке с 8:00 до 16:00, которые были проанализированы с помощью симуляционного моделирования FlexSim©. Результаты моделирования показывают, что исходная модель отражает неэффективность работы банковских касс, поскольку сотрудники были перегружены, а большинство клиентов оставались недовольными. В исходной модели клиенты, обращающиеся к кассирам, находились в очереди около 3000 секунд (50 минут), а клиенты, обращающиеся в службу поддержки клиентов, - около 2541,6 секунд (42 минуты). За период моделирования обе кассы обслужили 271 клиента. Эффективность работы персонала на кассах составила 79,62% и 79,79% соответственно, а на кассах службы поддержки клиентов - 99,28%, что свидетельствует о перегрузке персонала. Однако оптимизированный процесс организации очередей продемонстрировал улучшение производительности персонала и высокую удовлетворенность клиентов. При добавлении еще одного сотрудника на рабочее место в отделе обслуживания клиентов пропускная способность увеличилась до 322 клиентов, а эффективность работы персонала составила 91,42% и 86,37% соответственно. Результаты оптимизированного процесса организации очередей показывают лучшие показатели и должны быть внедрены в банке для повышения удовлетворенности клиентов и эффективного управления персоналом.

**Ключевые слова:** теория массового обслуживания, моделирование, оптимизация, FLEXSIM, банковское дело.

**Дата получения статьи:** 04.04.2026  
**Дата принятия к публикации:** 10.05.2026  
**Дата публикации:** 25.06.2026

**Сведения об авторах:**

Юлиус Беттлувобел Умека – магистр технических наук, кафедра машиностроения, инженерный факультет, Университет Абуджи, Нигерия,

**Abstract.** This study applies a simulation approach to the queueing problem to improve service delivery of a banking system in Nigeria. The study adopted data obtained at the bank from 8:00 am to 4:00 pm which was analysed using FlexSim© simulation. The results of the simulation analysis show the initial model signifies how the bank counters were designed, which was not efficient as workers were overworked, majority of customers were left unhappy and unsatisfied. The initial model had customers for teller services stay in queue for around 3000 seconds (50 minutes) while customers seeking the attention of customer service stayed around 2541.6 seconds (42 minutes) in queues both the counters had a throughput of 271 customers attended to over the simulation period. Staff efficiency for the teller counter was 79.62 and 79.79% each and 99.28% for customer service, this signifies worker overload. However, the optimized queueing process showed improved performance of staff and high customer satisfaction with the addition of another staff to the customer service workstation, the throughput capacity was increased to 322 and staff efficiency of 91.42 and 86.37%. The results of the optimized queueing process show better performance and should be adopted and implemented in the bank for increased customer satisfaction and proper staff management.

**Keywords:** queueing theory, simulation, optimization, FLEXSIM, banking.

**Date of manuscript reception:** 04.04.2026  
**Date of acceptance for publication:** 10.05.2026  
**Date of publication:** 25.06.2026

**Authors' information:**

Julius Bettluwhobel Umeka – M. Eng, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Abuja, Nigeria,

*e-mail: juliusumeka@gmail.com.*

**Ишая Муса Дагва** – доктор философии, профессор, кафедра машиностроения, инженерный факультет, Университет Абуджи, Нигерия,

*e-mail: dagwa.ishaya@uniabuja.edu.ng.*

**Иенагбе Бенджамин Угеоке** – доктор философии, профессор, кафедра машиностроения, инженерный факультет, Университет Абуджи, Нигерия,

*e-mail: ben.ugheoke@uniabuja.edu.ng.*

**Абдулхаким Хассан Нурудин** – доктор философии, преподаватель, кафедра машиностроения, инженерный факультет, Университет Абуджи, Нигерия, *e-mail: hassan.abdulhakeem@uniabuja.edu.ng.*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9624-8224>

† *e-mail: juliusumeka@gmail.com.*

† **Ishaya Musa Dagwa** – PhD, Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Abuja, Nigeria,

† *e-mail: dagwa.ishaya@uniabuja.edu.ng.*

† **Iyenagbe Benjamin Ugheoke** – PhD, Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Abuja, Nigeria,

† *e-mail: ben.ugheoke@uniabuja.edu.ng.*

† **Abdulhakeem Hassan Nurudeen** – PhD, Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Abuja, Nigeria,

† *e-mail: hassan.abdulhakeem@uniabuja.edu.ng.*

† ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9624-8224>

## 1. Introduction

Banks are regarded as service facilities that provide financial and make contributions to the economy, they also play a crucial role on the mobilization of idle funds, aid in the implementation of Government monitoring funds [1]. There are many challenges faced by this system, in Nigeria with many related to service delivery, human resource management, inadequate technology innovation in operation services, poor corporate governance practices, reliance on public sector funds [2]. In most banks in Nigeria, customers spend huge amounts of time in queues, and congestion in most bank branches which leads to customer dissatisfaction as well as loss of business opportunities [3].

Queues are lines of people or objects waiting for services which operation managers use it as a tool to assess and manage waiting times through strategic approaches to reduce the time waiting line length, average waiting times [4]. Queueing theory models are vital to service and manufacturing industries; the service industry regards queues as customers waiting to be attended to, the formation of queues is largely affected by the speed of service delivery, fast queues do not easily form, but when services are slow queues are formed [5].

Queueing theory is essential in evaluating system performance, customer volume within the system, customers in line, service utilization, response time, customer waiting time and system idle time [6].

The expense of delivery and the expenses incurred when service is not provided are regarded as queueing concepts, therefore, man-

agement must provide services to attract and retain customers by prioritising effective and efficiency service that will guarantee customer satisfaction, reduced queues, waiting time costs etc. [7, 8].

## 2. Literature Review

A study was performed on queue analysis of public healthcare system to reduce waiting time using Flexsim 6.0 software, the research realized that the long queues make patient's waiting time large and service delivery to be very slow and stressful for patients. Therefore, a simulation experiment was performed to develop an alternative solution. Before the simulation, the registration counter and other points were almost busy all the time, with utilization of 96.56%, then the simulation results showed a decrease in waiting time of around 80% through the addition of resource personnel in the registration counter [9].

Meanwhile, another study optimized queue system using line balancing method and Flexsim software. The results show that the initial path efficiency of 64.69% and 31 patients queueing, while the simulation results show that having an additional doctor also reduces queueing of patients from 31 to 14 and an average path efficiency of 78.80% [10].

Madaline et al [1] applied queueing theory to improve service of a banking system in Laguna, Philippines. The bank had 2 operational counters which had a significant difference between the waiting and service time when serving senior citizens in the system. However, the system's waiting, service and total time were determined

using ProModel 2016. The study recommended an additional counter for all transactions, reducing waiting time. Another study was also performed on the optimization of foreground support facilities for commercial banks based on queuing theory, the scholars argued that the addition of ATM variables in the two banks as support facilities reduces the bank's total costs and customer waiting costs [5].

The aim of the study was to perform simulation and optimization of a queue process in a service organization to increase service delivery and reduced worker overload using FlexSim.

### 3. Methodology

In this research work, data was gathered through the following ways:

Physical counting of customers coming into the bank was collected for four weeks in one

bank (i.e., one month) between 8:00 am to 4:00 pm. Questionnaires were used. 200 questionnaires were administered and 180 respondents were received.

#### 3.1. Simulation Modelling using FlexSim

Flexsim software has distinguished itself from other simulation software companies as having an object-oriented environment that enables the design of models, visualization and monitoring of flow processes with animation in 2D and 3D [11].

#### 3.2. Building the Simulation Model

Simulation elements were added to the Flexsim© environment and parameters were set as shown in Table 1 and according to [12].

Table 1

Summary of Model and System Elements used in the Simulation Environment

Model Element	System Element	Description
Source	Customer entry point	Arrival of customers at the banking hall.
Queue	Customers waiting point	Point where customers queue in lines to be attended to
Workers	Staff	Attending to customer needs
Fixed Resources	Workstations	Customer service desks or tellers
Task Executor	Sets the queueing process	Executes how the queues move within the bank
Sink	Exit point	Customer exit from the bank

## 4. Results and Discussions

### 4.1. Simulation Results Analysis

The simulation model was set, objects were connected and the simulation time was set to 28800 seconds, during the simulation period, staff, and workstations are connected as shown in Figure 1.

The system throughput is shown in Figure 2, a careful observation could be seen that the customer service agent could only process 79 customer complaints, while Teller Services were able to process 190 requests and around 272 cus-

tomers were unattended to in a day. Out of 541 people that entered the bank for various issues.

Customer stay times on queue were measured, on average, customers that were for transactions other than complaints spent around 3000 seconds each with a maximum staytime period of 304.46 seconds while customers having complaints on average spent 360.06 seconds with a maximum time of 364.07 seconds however the longest stay time for customers requiring the attention of customer service agent as recorded as 2541.6 seconds (42 minutes) with a maximum of 4883.74 seconds (81.5 minutes).

The state of each workstation showed the percentage utilization of staff as shown in Figure 3.

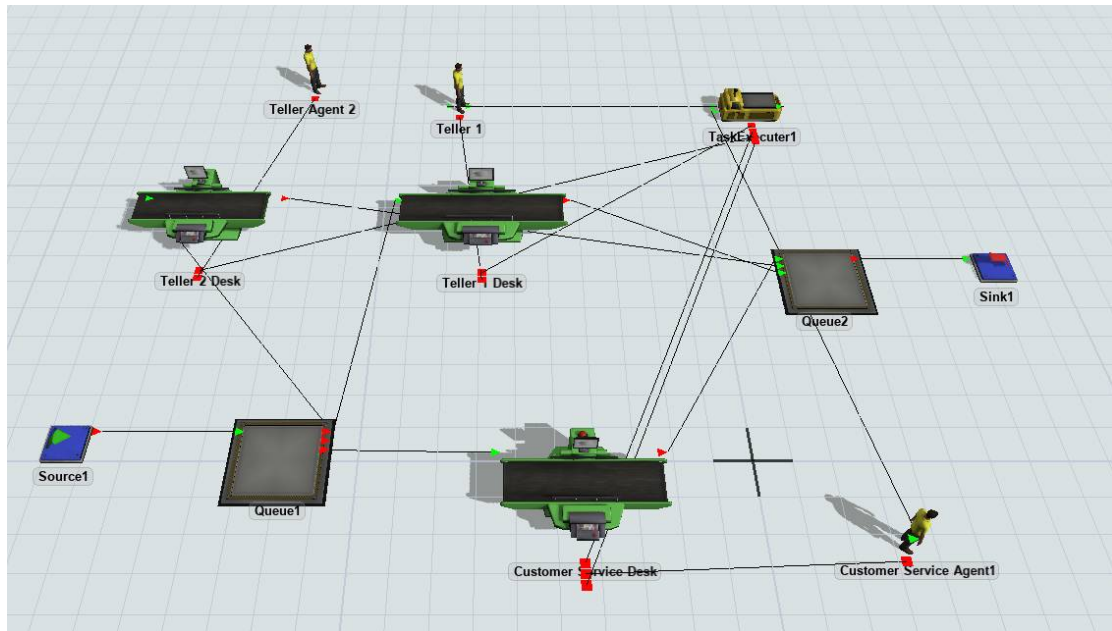


Figure 1. Simulation model layout

### Throughput

Object	Throughput
Customer Service Desk	79
Teller 1 Desk	95
Teller 2 Desk	95
Queue1	272
Queue2	269
Sink1	269

Figure 2. Throughput capacity of customer service agents

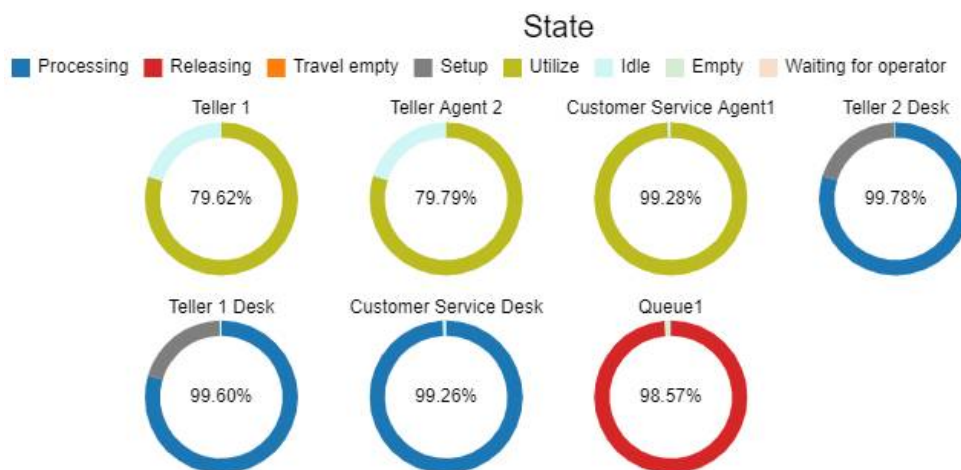


Figure 3. System state of each agent

From Figure 3, Teller1 had 79.62%, Teller Agent2 with 79.79%, Customer Service Agent1 had 99.28% utilization which is too high for an employee to have such efficiency this will result

in fatigue and employee demoralization as the work seems too tedious and unfavourable.

The State Gantt Chart showed the worker activity from the opening hours to closing hours

shown in Figure 4, the system shows it is being fully utilized.

to till closing period with so many customers in the queue.

The Stay time by the hour for the model shown in Figure 5 peak period from 10:00 AM

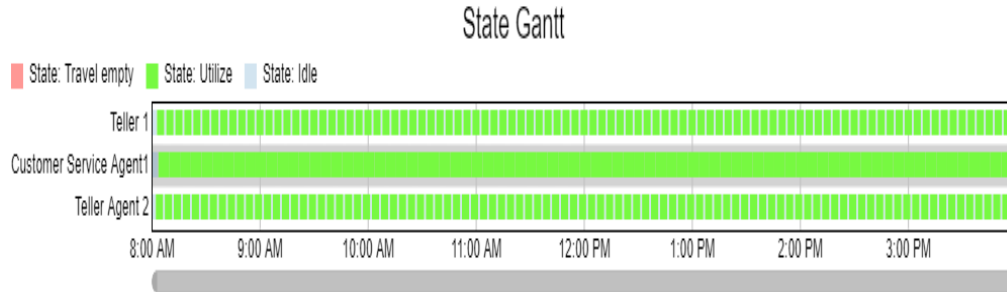


Figure 4. Employee Gantt chart

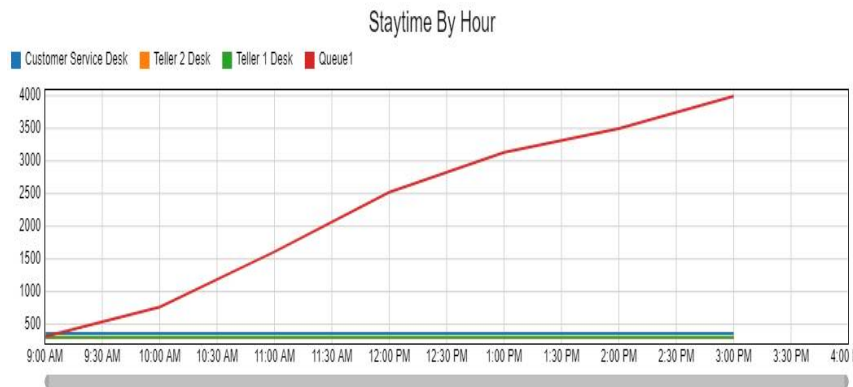


Figure 5. Staytime by hour of customers

4.2. Optimization of the Queuing Process

The initial simulation results were not very effective as customers requiring attention were

left mostly stranded, hence the need for optimization of the customer service section as shown in Figure 6.

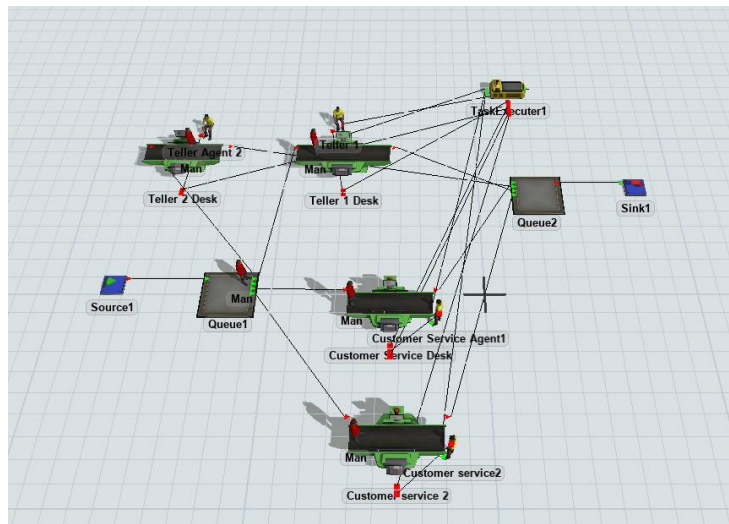


Figure 6. Optimized simulation model layout

Figure 6 shows the improvement in the queuing process with the addition of another workstation (Customer Service 2 and staff), then the simulation clock was reset and set to 28800 seconds. The results obtained show the stay time on average for customers at the workstations was recorded as 300 seconds and a maximum of 305.59 seconds while customers needing the attention of customer service agents spent on average 360.07 and 340.06 seconds.

The maximum stay time for customers being attended to by the customer service agent was 364.00 seconds. The maximum staytime period for customers in queue was 573.00 seconds while on average of 108.83 seconds was observed. This showed a great improvement in the waiting period of customers from the initial model that on average a customer spent around 2541.6 seconds with a maximum waiting period of 4883.74 seconds from the initial process.

Staytime

Object	Avg Staytime	Min Staytime	Max Staytime
Teller 2 Desk	300.05	300	304.46
Teller 1 Desk	300.04	300	303.53
Customer Service Desk	360.06	360	364.74
Queue1	108.83	0	573.00
Customer service 2	340.06	340	344.52

Figure 7. Customer staytime

The throughput of staff also improved in the optimized process, with an increase in the number of treated customers from 72 customers in the initial model to 146 customers per day as shown in Figure 8.

Throughput

Object	Throughput
Customer Service Desk	73
Teller 1 Desk	88
Teller 2 Desk	88
Queue1	326
Queue2	322
Sink1	322
Customer service 2	73

Figure 8. Throughput capacity

The state of the system was also recorded in terms of the staff utilization efficiency and shown in Figure 9, from the Figure, it could be observed that the teller section remained unchanged while the section requiring much attention was customer service which had an efficiency of 91.42% and 86.37% respectively which is a decrease from the initial model that was 99.26%.

The system staytime by hour showed the graph of peak periods of customers in the banking hall shown in Figure 10.

State

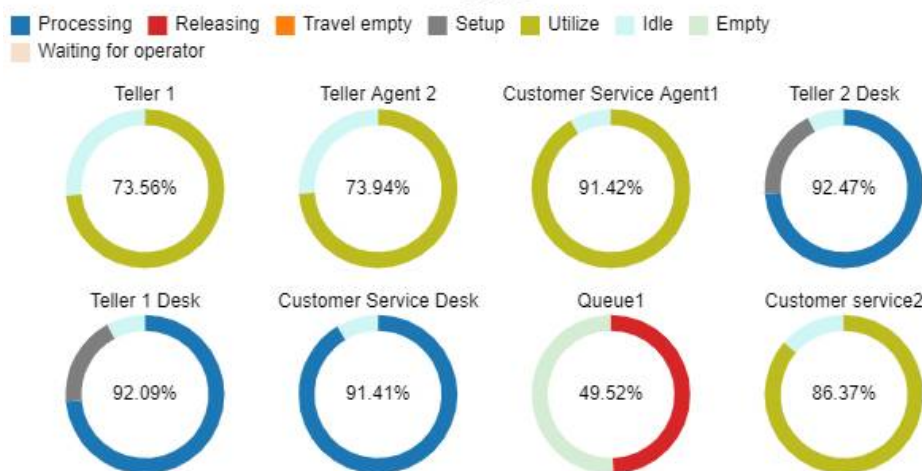


Figure 9. State of customer service agents

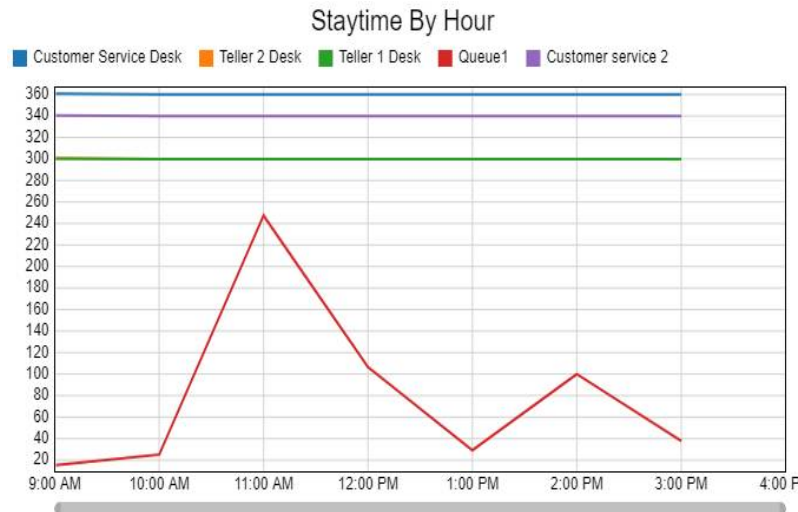


Figure 10. Customer staytime by hour

Figure 10, highlights the peak period showing that from 10:00 AM to 1:00 PM is where customers are trooping into the bank and queues are formed in the system each with different desired service to be delivered.

## 5. Conclusions

At the end of the study, the results obtained from the simulation exercise of the improvement of a queue process in the banking hall in Nigeria were based on the objectives of the study to use simulation analysis to improve the queuing problem in a banking hall, the simula-

tion analysis results from the initial model showed worker overload with utilization of customer service reaching 99.26% and only 79 customers were responded to. However, the optimization layout was done with an introduction of another customer service agent which further improved the state of the system recorded in terms of the staff utilization efficiency of the customer service agent which had an efficiency of 91.42% and 86.37% respectively and over 322 customers were attended to, therefore, the optimized queuing process layout should be adopted and implemented to improve customer satisfaction and staff management.

## References

1. M. Sy, F.L.S. Malabuyoc, M.D.M. Sobrevilla, R.D. Estember. A Queuing Theory Approach to Improve Service Quality of Banking Systems: A Case Study of a Bank in Laguna, Philippines. In: *Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management Monterrey, Mexico (2021)*, 2021, pp. 2703–2714.
2. A. Afolalu, K.O. Babaremu, S.O. Ongbali, A.A. Abioye, A. Abdulkareem, S.B. Adejuyigbe. Overview impact of application of queuing theory model on productivity performance in a banking sector. *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, 2019, p. 032033.
3. C. Aronu, J. Okoh, E. Onyeka, S.A. Ikemefuna. The assessment of bank service performance in delta state, Nigeria: A queuing theory approach. *Further Applied Mathematics*, vol. 1, no. 1, pp. 10–25, 2021.
4. R. Dhar, A. Chakraborty, J. Sarkar. Queuing Theory and Optimization in Banking Models. In: *Cybernetics, Cognition and Machine Learning Applications: Proceedings of ICCMLA 2019*, Springer, 2020, pp. 205–213.
5. J. Shi Jianxin, Wang. Optimization of Foreground Support Facilities for Commercial Banks Based on Queuing Theory. In: *The 19th International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, pp. 913–924.

6. D.J.Li Liang, Wu. Analysis of Bank Queueing Based on Operations Research. In: *The 19th International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, pp. 777–787.
7. K.W.G. Cowdrey, J. de Lange, R. Malekian, J. Wanneburg, A.C. Jose. Applying Queueing Theory for the Optimization of a Banking Model. *Journal of Internet Technology*, vol. 19, pp. 381–389, 2018, [Online]. Available: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:64679929>
8. R. Dhar, A. Chakraborty, J. Sarkar. Queueing Theory and Optimization in Banking Models, 2020. [Online]. Available: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:219093774>
9. P. Amalia, N. Cahyati. Queue analysis of public healthcare system to reduce waiting time using flexsim 6.0. *International Journal of Industrial Optimization*, vol. 1, no. 2, p. 101, Aug. 2020, doi: 10.12928/ijio.v1i2.2428.
10. H. Karunianto, F. Agusti, R.I. Buwono. Optimization of the Queu System using Line Balancing Methods and Flexsim Software Simulation at the Siaga Medika Banyumas Hospital. In: *Proceeding of International Conference on Science, Health, And Technology*, 2023, pp. 473–481.
11. I.B. Ugheoke, A.H. Nurudeen, I.M. Dagwa, I.D. Muhammad. Facility Layout Design, Simulation, and Optimization for Kaolin Beneficiation Plant Using Flexsim. *Mechanical Technology and Engineering Insights*, vol. 1, no. 1, pp. 15–28, 2024.
12. N. Hassan, A. Arogundade, U. Iyenagbe, D. Musa. Simulation and analyses of shea nuts (*vittalaria paradoxa*) processing plant using FlexSim©. *Journal of Future Sustainability*, vol. 3, no. 2, pp. 67–74, 2023.

Сетевое издание  
**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК**  
Брянского государственного университета

**ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ / ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ /  
НАУКИ О ЗЕМЛЕ**

**Учредитель и издатель:**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского».

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации  
выдано Федеральной службой по надзору  
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций  
Эл № ФС77-62798 от 18 августа 2015 г.**

**Зам. Главного редактора сетевого издания:**  
доктор технических наук, профессор  
А.В. Лагереv

**Адрес учредителя:**  
ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет  
имени академика И.Г. Петровского»  
241036, Россия, Брянск, ул. Бежицкая, д. 14

**Адрес редакции и издателя:**  
РИСО ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет  
имени академика И.Г. Петровского»  
241036, Россия, Брянск, ул. Бежицкая, д. 20

Дата размещения сетевого издания в сети Интернет  
на официальном сайте <http://www.ntv-brgu.ru> 25.06.2026 г.