

УДК (UDC) 621.833

РАСЧЁТ И АНАЛИЗ ТРАЕКТОРИЙ ХАРАКТЕРНЫХ ТОЧЕК ДЛЯ  
ПЛАНЕТАРНЫХ КОНИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧ С ПРЕЦЕССИРУЮЩИМИ  
САТЕЛЛИТАМИCALCULATION AND ANALYSIS OF CHARACTERISTIC POINT TRAJECTORIES  
FOR PLANETARY BEVEL GEARS WITH PRECESSING SATELLITESВинник П.М., Кудрявцев А.В., Петухов-Покровский Р.А.  
Vinnik P.M., Kudryavtsev A.V., Petukhov-Pokrovsky R.A.Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова  
(Санкт-Петербург, Россия)

Baltic State Technical University "VOENMEH" named after D.F. Ustinov (St. Petersburg, Russian Federation)

**Аннотация.** Статья посвящена исследованиям кинематики в области прецессирующих зубчатых передач. Перечислены возможные способы генерации прецессии на основе исследования патентной базы. Определено место таких передач в линейке редукторов с зубчатыми передачами в одну ступень. Перечислены преимущества планетарных прецессирующих передач с центральным опорным коническим зубчатым колесом над прецессирующими передачами с опорным цилиндрическим зубчатым колесом. Обоснована необходимость развития передач первого типа. В статье кратко описана модель передачи с цилиндро-коническим зацеплением и принципы её построения. Для передач с опорным коническим зубчатым колесом подробно изложена и графически проиллюстрирована методика выбора и построения математической модели для описания движения. Выведены закономерности изменения углов Эйлера и построена система уравнений движения точек, принадлежащих прецессирующему колесу. Построены пространственные траектории точек для структурных исполнений передачи вида 2К-Н и К-Н-В. На основании обнаруженных законов движения проанализирована возможность прогнозирования параметров разрабатываемой передачи. Выявлено условие, обеспечивающее кинематическую точность и плавность работы звеньев для передачи структурного исполнения 2К-Н. Также исследовалось влияние угла нутации на габариты редуктора. Определена оптимальная разница между числом зубьев сателлита и опорного колеса для минимизации размеров всех звеньев. Обоснован выбор простых ограничителей вращения для передач вида К-Н-В, таких как пальцы, скользящие в прямолинейных пазах корпуса редуктора. Полученные уравнения движения позволяют моделировать на ЭВМ зубчатые профили с цилиндро-коническим или внутренним коническим зацеплением, предложить технологические операции для зубообработки требуемых профилей.

**Abstract.** The article talks about research on the kinematics of precessing gears. The possible ways of precession generation based on the patent database are listed. A range of gearboxes with single-stage gears has been defined. The advantages of planetary precessing gears with a central wheel with a circular gear ring on the support plane over precessing gears with a cylindrical gear profile of the central wheel are listed. The necessity of the first type of transmission is substantiated. The article briefly describes the transmission model with a conical-cylindrical gear. For gears with a gear profile on the support plane, the method of constructing a mathematical model is described in detail and illustrated. The changes of the Euler angles are found and the system of equations of motion of the satellite points is constructed. Trajectories of points for 2K-H and K-H-V transmissions are constructed. Based on these equations, the transmission parameters are analyzed. The kinematic condition for 2K-H transmission has been found. Also, the effect of the nutation angle on the size was investigated. The optimal difference between the number of gear teeth of the satellite and the fixed wheel has been determined to minimize the size. The choice of rotation limiters for K-H-V gears, such as fingers sliding in grooves, is justified. The error caused by the deviation of the real finger trajectory from the theoretical is calculated. These equations will help to make gears with a conical-cylindrical or internal conical crown on a computer, and offer technology for creating profiles.

**Ключевые слова:** планетарная прецессионная (прецессирующая) передача, конический сателлит, углы Эйлера, уравнения движения, траектория точки.

**Дата получения статьи:** 07.09.2025  
**Дата принятия к публикации:** 03.11.2025  
**Дата публикации:** 25.12.2025

#### Сведения об авторах:

**Винник Пётр Михайлович** – доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Высшая математика», ФГБОУ ВО «Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова», *e-mail: vinnik\_pm@voenmeh.ru*.  
*ORCID:* <https://orcid.org/0009-0009-9982-044X>

**Кудрявцев Александр Владимирович** – главный метролог, ФГБОУ ВО «Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова», *e-mail: alex-17-v-v@yandex.ru*.  
*ORCID:* <https://orcid.org/0009-0004-2756-4874>

**Петухов-Покровский Родион Александрович** – студент, ФГБОУ ВО «Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова», *e-mail: rodionap-03@bk.ru*.  
*ORCID:* <https://orcid.org/0009-0003-6874-4604>

## 1. Введение

Планетарные конические зубчатые передачи с прецессирующими сателлитами допустимо называть планетарной прецессионной (прецессирующей) передачей или просто прецессирующей передачей. Прецессирующие передачи – это механические передачи, в которых применяется генератор прецессии. Прецессирующее движение сателлита заключается в том, что во время работы редуктора ось симметрии сателлита пересекает ось входного вала под некоторым углом нутации.

Наиболее распространённым в патентной базе способом генерирования прецессирующих колебаний является вращение кривошипа на входном валу [1-6]. Также существуют варианты задания прецессионного движения воздействием торцевых [7] или пространственных кулачков [8], двумя разнонаправленными цилиндрическими эксцентриками [9].

Генератор прецессии задаёт перемещение только для оси сателлита. Прецессирующее колесо может вращаться за счёт зацепления с неподвижным зубчатым венцом или совершать прецессирующие колебания без вращения.

**Keywords:** planetary precession (precessing) transmission, conical satellite, Euler angles, equations of motion, trajectory of a point.

**Date of manuscript reception:** 07.09.2025  
**Date of acceptance for publication:** 03.11.2025  
**Date of publication:** 25.12.2025

#### Authors' information:

**Petr M. Vinnik** – Doctor of Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Higher Mathematics at Baltic State Technical University "VOENMEH" named after D.F. Ustinov,  
*e-mail: vinnik\_pm@voenmeh.ru*.  
*ORCID:* <https://orcid.org/0009-0009-9982-044X>

**Alexander V. Kudryavtsev** – Chief Metrologist at Baltic State Technical University "VOENMEH" named after D.F. Ustinov, *e-mail: alex-17-v-v@yandex.ru*.  
*ORCID:* <https://orcid.org/0009-0004-2756-4874>

**Rodion A. Petukhov-Pokrovsky** – student at Baltic State Technical University "VOENMEH" named after D.F. Ustinov, *e-mail: rodionap-03@bk.ru*.  
*ORCID:* <https://orcid.org/0009-0003-6874-4604>

Необходимо определить место прецессирующих передач в линейке редукторов, широко используемых в промышленности. За основной параметр, как базовый при определении, принимается «одноступенчатость» зубчатой передачи. За параметр, определяющий место в линейке, принимается передаточное отношение (число) зубчатой передачи. Тогда места распределяются в следующем порядке:

- до 5-6 – простые цилиндрические и конические;
- до 10-15 – планетарные классические;
- до 20-30 – червячные;
- до 40-50 – эксцентриковые;
- до 100-150 – волновые;
- от 25-30 до 400 – прецессирующие.

Конструктивная реализация двухступенчатого прецессионного редуктора [1] по габаритам практически не отличается от одноступенчатого, а это позволяет повышать передаточное отношение до 10 000 и больше.

Прецессирующие технологии глубоко внедрились во многие отрасли промышленности. Согласно [10]: «Планетарная прецессионная передача нашла свое практическое применение в конструкции приводов кон-



тактных разъединителей на электрифицированных участках Белорусской железной дороги, в приводе строительно-отделочных (заглаживающих бетон) машин СО-170, в приводе шнековых конвейеров в сельском хозяйстве, в приводе установки нория, предназначеннной для вертикального транспорта сыпучих материалов, в конструкции лебедок для проведения аварийно-спасательных, сельскохозяйственных и ремонтных работ».

Одни из первых наработок в этой области относятся к трудам учёных из Ленинградского института точной механики и оптики, Ленинградского политехнического института им. Калинина и Ленинградского военно-механического института. В настоящее время прецессирующие передачи имеют широкую теоретическую базу. Исследования ведутся сразу по нескольким направлениям. Выделяются три научных школы, занимающиеся различными вопросами, связанными с прецессирующими передачами.

Школа, созданная учёными из Технического университета Молдовы [1, 6, 8, 11], рассматривает прецессирующие передачи с промежуточными телами качения и некоторые зубчатые передачи. Их характерной особенностью является наличие центрального колеса с круговым зубчатым венцом на опорной плоскости или внешней конической поверхности (для схемы 2К-Н). Зубчатый профиль сателлита для них находится на внешней или внутренней конической поверхности. Исследования, которые проводятся в Тюменском Индустриальном Университете, а также в этой статье, продолжают развитие тематики кишинёвской школы.

Основу для исследований научной школы Южно-Уральского государственного университета составляют передачи с центральным колесом, где зубчатый профиль находится на внутренней цилиндрической поверхности, а сателлит – на конической. Рассматриваются способы получения эвольвентных и неэвольвентных профилей, например в работах [12, 13]. В Ижевском государственном техническом университете им. Калашникова есть свои наработки по этому направлению [9].

Белорусская школа планетарных прецессионных передач представлена трудами учёных из Белорусского национального технического университета и Белорусско-Российского университета [10, 14-17]. В работах также изучаются передачи с центральным колесом, имеющим зубчатый профиль на внутренней цилиндрической поверхности. Акцент исследований ставится на упрощение структурных схем передач, уменьшение их габаритных размеров и повышение технологичности изготовления.

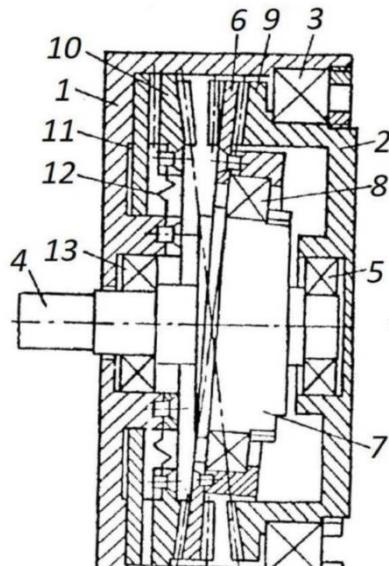
## 2. Постановка задачи исследования

На рис. 1 показан вариант технического воплощения прецессирующего редуктора, предложенного В.М. Артеменко [2]. Как отмечается в [3], такая структурная схема позволяет имитировать в прецессирующей двухступенчатой передаче одноступенчатость.

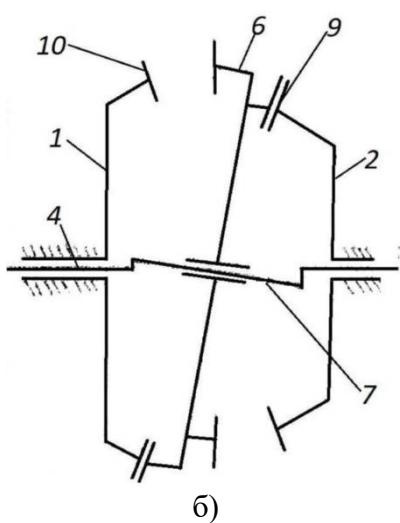
Прецессирующие передачи, в которых используется сателлит с зубчатым венцом на конической поверхности, обладают многозубым зацеплением сателлита и опорного колеса. Такая конфигурация имеет большой коэффициент перекрытия, обеспечивают высокую кинематическую точность и плавность работы. Но сателлиты с коническим зубчатым профилем (рис. 2) имеют существенный недостаток: они сложны в изготовлении и, как следствие, имеют высокую стоимость. По этой причине они не получили такого широкого распространения, как передачи с цилиндрическим зубчатым венцом. Несмотря на то, что в работах [11] рассматриваются уравнения поверхности зубчатых профилей или профилей, контактирующих с роликами, для конических сателлитов, описание модели движения и математический вывод этих зависимостей в статьях опущен.

Целью исследования является построение математической модели и расчёт траектории точек на поверхности сателлита. При этом описание, использованное для сателлита с цилиндрическим зубчатым венцом, не подходит для рассматриваемой задачи. В диссертации [14] проводится анализ и доказыва-





a)



б)

Рис. 1. Передачи вида 2К-Н:  
а – чертёж; б – структурная схема  
(1 – корпус; 2 – выходной вал; 3; 5; 8; 13 –  
подшипники; 4 – входной вал;  
6 – прецессирующий сателлит; 7 – генератор  
прецессии (кривошипная втулка);  
9 – выходное коническое колесо;  
10 – опорное коническое колесо;  
11 – кулачковый диск; 12 – диафрагма)

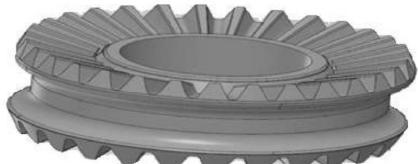


Рис. 2. Вариант двухвенцового конического  
сателлита

ется, что для минимизации механических потерь и габаритов редуктора необходимо расположить точку пересечения оси входного вала и оси прецессирующего колеса вне центра сателлита на определённом расстоянии. Такую схему движения можно представить в виде «юлы», которая касается боком пола и вращается относительно своего основания.

Прецессирующие передачи с коническим зацеплением избавлены от проблемы потерь механической мощностей и больших габаритов, связанных с входом, и выходом при соединении контактирующих зубьев. Поэтому в [1-9] предлагается размещать точку пересечения осей входного вала и сателлита в геометрическом центре прецессирующего колеса. Модель движения сателлита таких передач схожа с прецессией «монеты», совершающей колебания на плоскости.

### 3. Уравнения движения

#### 3.1. Общие принципы построения математической модели

Прецессирующие колебания традиционно характеризуют при помощи трёх углов Эйлера и трёх угловых скоростей [18] (рис.3):

Ф – угол собственного вращения;

Ψ – угол прецессии;

Θ – угол нутации;

•  $\Phi = \omega_\Phi$  – угловая скорость собственного вращения или ротации;

•  $\Psi = \omega_\Psi$  – угловая скорость прецессии;

•  $\Theta = \omega_\Theta$  – угловая скорость нутации.

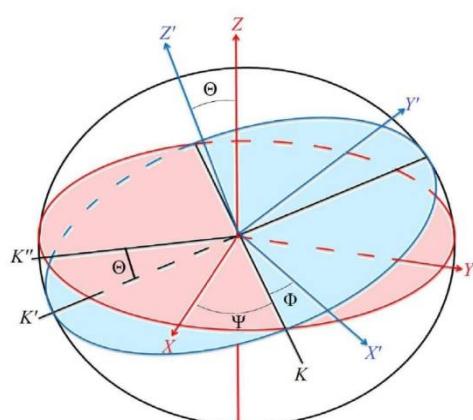


Рис. 3. Углы Эйлера

Система координат  $XYZ$  неподвижна, плоскость  $XOY$  назовём экваториальной. Система  $X'Y'Z'$  жёстко связана с зубчатым колесом. Она совершает сложное вращательное движение, положение точки  $O$  не меняется в пространстве. Тогда плоскость  $X'CY'$  будет являться прецессирующей плоскостью.

Углы Эйлера позволяют связать координаты точки в подвижной системе  $X'Y'Z'$  и неподвижной  $XYZ$  путём последовательных поворотов по трём углам: прецессии  $\Psi$ , нутации  $\Theta$ , собственного вращения  $\Phi$ . Прецессирующая плоскость пересекается с экваториальной плоскостью по прямой  $OK$ . Это линия узлов. Прямые  $OK'$  и  $OK''$  – это прямые, перпендикулярные линии узлов  $OK$  и принадлежащие прецессирующей плоскости и экваториальной плоскости соответственно.

Угол собственного вращения  $\Phi$  отсчитывается на прецессирующей плоскости от луча  $OK$  до оси  $OX'$  движущейся системы координат. Угловая скорость ротации  $\omega_\Phi$  характеризует вращение подвижной системы координат  $X'Y'Z'$  или прецессирующей плоскости  $X'CY'$  относительно оси  $OZ'$ , то есть вращение сателлита относительно своей оси симметрии.

Угол прецессии  $\Psi$  измеряется в экваториальной плоскости между осью  $OX$  неподвижной системы координат и линией узлов  $OK$ . Скорость прецессии  $\omega_\Psi$  описывает поворот прецессирующей плоскости относительно оси  $OZ$  неподвижной системы координат – оси входного вала.

Угол нутации  $\Theta$  определяется, как угол между осями  $OZ$  и  $OZ'$  неподвижной и подвижной системы координат или угол между экваториальной плоскостью и прецессирующей плоскостью. Угловая скорость нутации  $\omega_\Theta$  характеризует вращательное движение тела относительно оси, проходящей через прямую  $OK$ .

Положение точки  $M$  в подвижной системе координат  $X'Y'Z'$  в общем случае описывается при помощи трёх проекций. Так как сателлит – можно считать симметричным телом, то в задаче рассматриваются

только две проекции: проекция радиус-вектора  $\overline{OM}$  на ось  $OX'$  равна  $a$  и проекция  $\overline{OM}$  на ось  $OZ'$  равна  $b$  (рис.4, а). Описание кинематики движения сводится к уравнению траектории одной точки на поверхности прецессирующего колеса, так как все точки на поверхности движутся по одному закону, но с разными начальными фазами.

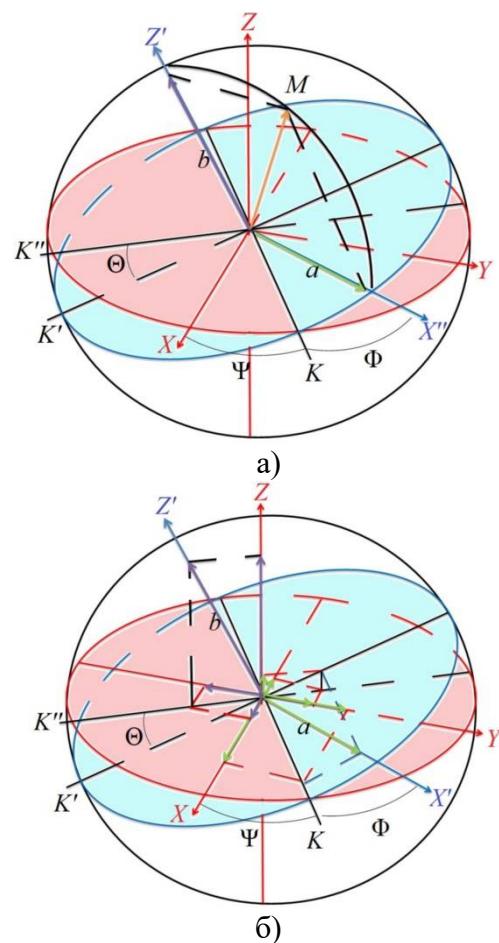


Рис. 4. Проекции радиус-вектора  $\overline{OM}$ :  
а – проекции  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  подвижной системы координат; б – проекции векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  на оси неподвижной системы координат

Выделяются два вида планетарных прецессирующих передач: 2К-Н и К-Н-В [14, 15]. Траектория движения сателлита для каждого из них будет различной. Сначала рассмотрим передачу вида 2К-Н. Её структурная схема представлена на рис. 1, б. Во время движения сателлит 6 сопрягается с двумя зубчатыми венцами: неподвижной поверхностью опорного колеса 10 и вращающимся

зубчатым колесом 9, связанным с выходным валом 2.

Спроецировать положение точки  $M(a, b)$  на оси неподвижной системы координат можно при помощи направляющих косинусов в три этапа:

1.1. Спроецировать вектор  $\bar{a}$  на линию узлов  $OK$  и на линию  $OK'$ , перпендикулярную  $OK$ , лежащую в прецессионной плоскости;

1.2. Полученную проекцию на прямую  $OK'$  спроецировать на линию  $OK''$  и  $OZ$ ;

1.3. Полученные проекции на прямые  $OK$  и  $OK''$  спроецировать на оси  $OXY$ ;

2.1. Спроецировать вектор  $\bar{b}$  на ось  $OZ$  и линию  $OK''$ ;

2.2. Полученную проекцию на прямую  $OK''$  спроецировать на оси  $OX$  и  $OY$  неподвижной системы координат;

3. Сложить проекции векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  на оси  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$ .

Так выводятся формулы для координат точки  $M(a, b)$  через углы

Эйлера (рис. 4, б):

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a(\cos\Phi \cos\Psi - \sin\Phi \sin\Psi \cos\Theta) + \\ \quad + b \sin\Theta \sin\Psi, \\ y = a(\cos\Phi \sin\Psi + \sin\Phi \cos\Psi \cos\Theta) - \\ \quad - b \sin\Theta \cos\Psi, \\ z = a \sin\Phi \sin\Theta + b \cos\Theta. \end{array} \right. \quad (1)$$

Для того, чтобы получить из выражения (1) уравнение движения, нужно выразить углы через одну независимую переменную – время  $t$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{array} \right.$$

Необходимо выяснить, как будет меняться каждый из углов Эйлера в зависимости от  $t$ . Составим уравнения  $\Phi = \Phi(t)$ ,  $\Psi = \Psi(t)$ ,  $\Theta = \Theta(t)$ . Проследим за движением колеса и изменением углов Эйлера в прецессионной передаче.

### 3.2. Траектория для передачи 2К-Н

Радиус опорного (неподвижного) колеса ограничен и не позволяет прецессионному колесу перейти в горизонтальное положение, угловая скорость  $\omega_\Theta = \dot{\Theta} = 0$ , угол  $\Theta$  остаётся постоянным. Поэтому величины  $\sin\Theta$  и  $\cos\Theta$  уравнения (1) также являются константами.

Вращение в передаче происходит с постоянной угловой скоростью ротации  $\omega_\Phi$  и прецессии  $\omega_\Psi$ . Угол прецессии можно считать основным, так как прецессионное движение плоскости задаёт ведущий вал. Угол  $\Psi$  определяется, как  $\Psi(t) = \omega_\Psi t + \Psi_0$ . Начальная фаза  $\Psi_0$  принимается нулевой. Закон движения входного звена  $\Psi(t) = \omega_\Psi t$ .

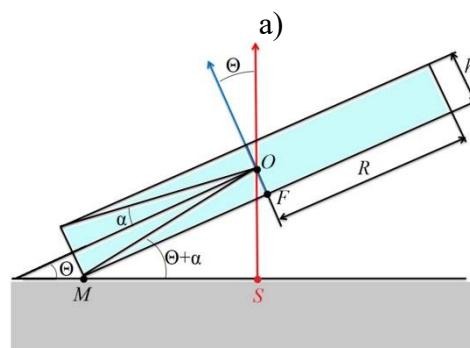
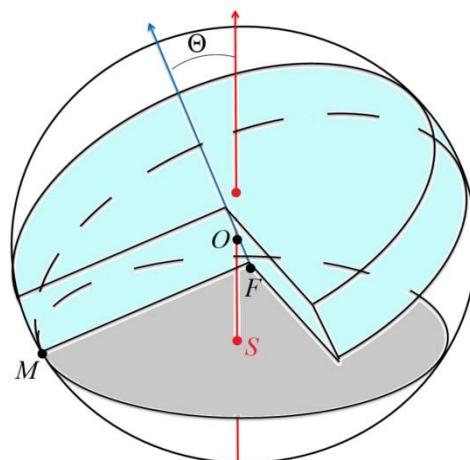


Рис. 5. Модель спутника в виде кругового цилиндра: а – аксонометрия; б – сечение в точке контакта  $M$

Пусть  $R$  – это радиус прецессионного колеса, а  $h$  – его толщина (рис. 5). Если вы-

брать точку  $M$  окружности основания цилиндра:  $M\left(R, -\frac{h}{2}\right)$ , то длина радиус-вектора

$\overline{OM}$  выражается, как  $|\overline{OM}| = \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4}}$  или

$$|\overline{OM}| = \frac{R}{\cos \alpha}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{h}{2R}.$$

Прецессирующее колесо перекатывается по опорному колесу, постоянно радиуса

$$MS = |\overline{OM}| \cos(\Theta + \alpha) = R \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha}.$$

Пусть на начальной фазе  $\Psi_0$  в момент времени  $t_0$  оси  $OX$ ,  $OX'$  и линия узлов  $OK$  совпадали, а касание звеньев проходило

в точке  $M_0$  прецессирующего колеса (рис. 6, а). Она контактировала с опорным в точке  $N$  и совпадала с ней. Затем, при повороте прямой  $OK$  прецессирующего круга на угол  $\Psi$  относительно  $OX$ , точка касания  $M(t)$  переместилась вместе с линией  $OK'$  на тот же угол:  $\angle MSN = \Psi$ . На рис. 6, б показано, как сателлит перекатился по опорному колесу на угол  $90^\circ$ . При этом видно, что при повороте  $\Psi$  в положительном направлении (по часовой стрелке), прецессирующая плоскость и расположенная на ней точка  $M(t)$  должна переместиться на угол  $\Phi$  в противоположном направлении (против часовой стрелки):  $\angle MOM_0 = -\Phi$ .

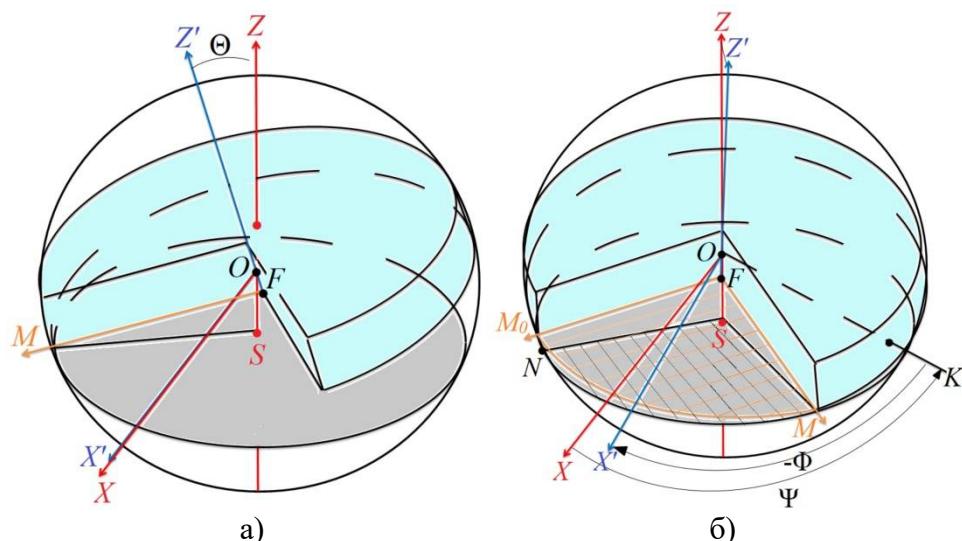


Рис. 6. Перемещение спутника: а – точка контакта  $M(t)$  в начальный момент времени; б – углы  $MSN$  и  $MFM_0$

Так как сателлит вращается без проскальзывания, то расстояния по окружностям от точки  $M(t)$  до точки  $M_0$  и от  $M(t)$  до  $N$  в любое время  $t$  равны друг другу. Обозначим длины дуг  $MM_0$  и  $MN$ , как  $l_{MM_0}$  и  $l_{MN}$ .

$$l_{MM_0} = l_{MN}. \quad (2)$$

Если взять угол  $\Psi$  в радианах, то длина дуги  $l_{MN}$  определяется, как произведение угла, который она заключает, на радиус опорного колеса  $MS$ :

$$l_{MN} = MS \times \Psi(t) = R \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\Psi t.$$

Длина дуги  $MM_0$  выражается через произведение её угла на радиус прецессионного колеса  $l_{MM_0} = R \times \angle MOM_0 = R(-\Phi)$ . Из выражения (2) следует:

$$R(-\Phi) = R \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\Psi t ;$$

$$\Phi = - \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\Psi t .$$

Таким образом, если подставить в уравнение (1) функции:  $\Phi = -\frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\psi t$ ,  $\Psi = \omega_\psi t$ ,  $\Theta = const$ , то получится параметрическое уравнение траектории от переменной  $t$ :

$$\begin{cases} x = a \left[ \cos\left(\frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_{\psi} t\right) \cos(\omega_{\psi} t) + \sin\left(\frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_{\psi} t\right) \sin(\omega_{\psi} t) \cos \Theta \right] + b \sin \Theta \sin(\omega_{\psi} t), \\ y = a \left[ \cos\left(\frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_{\psi} t\right) \sin(\omega_{\psi} t) - \sin\left(\frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_{\psi} t\right) \cos(\omega_{\psi} t) \cos \Theta \right] - b \sin \Theta \cos(\omega_{\psi} t), \\ z = -a \sin\left(\frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_{\psi} t\right) \sin \Theta + b \cos \Theta. \end{cases}$$

На рис. 7 показаны траектории двух точек, расположенных на нижней кромке сателлита  $\left(b = -\frac{h}{2}\right)$  имеющего толщину

$h = 0,2R$  и расположенных на расстоянии  $R$  и  $0,8R$  от начала координат.

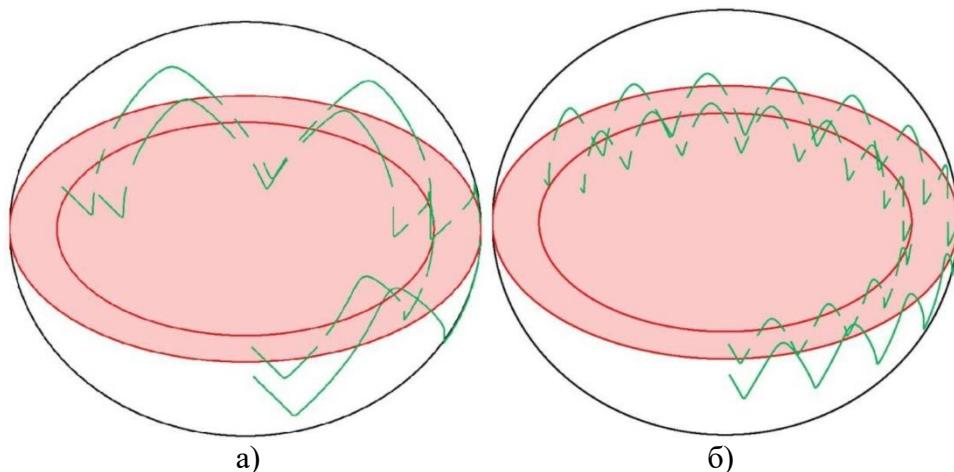


Рис. 7. Траектория точек для передачи 2К-Н: а –  $\Theta = 20^\circ$ ; б –  $\Theta = 10^\circ$

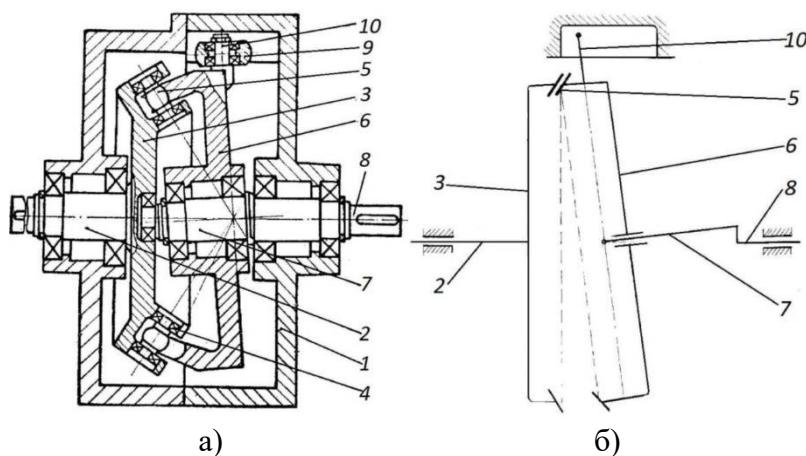


Рис. 8. Передачи вида К-Н-В: а – чертёж; б – структурная схема

1 – корпус; 2 – ведомый вал; 3 – цевочное коническое колесо; 4 – подшипники; 5 – цевки; 6 – зубчатый сателлит; 7 – кривошип; 8 – ведущий вал; 9 – ролик; 10 – палец

### 3.3. Траектория для передачи К-Н-В

Вариант такой передачи с цевочным зацеплением [4] представлен на рис. 8. На адаптированной для передачи структурной

схеме [5] цевочный венец показан зубчатым (рис 8, б).

В большинстве предложенных исполнений К-Н-В передач сателлит не может вращаться вокруг собственной оси. В качестве ограничителей могут выступать пальцы,

скользящие в пазах корпуса редуктора [4, 5] или зубчатые муфты с бочкообразным профилем зубьев [6].

Для математического вывода уравнений движения произведём тот же расчёт, что для передач 2К-Н: воспользуемся уравнениями проекций радиус-вектора  $\overline{OM}$  (1), и уравнениями для углов прецессии и нутации:  $\Psi = \omega_\Psi t$ ,  $\Theta = \text{const}$ . Характер движения прецессирующего колеса отличается от предыдущей схемы, поэтому закон изменения угла ротации  $\Phi = \Phi(t)$  будет другим. При той же частоте колебаний  $\Psi(t)$  сателлит прецессирует без вращения относительно своей собственной оси. При каждом новом обороте генератора прецессии в контакте будут находиться те же точки, что и на предыдущих оборотах. Траектория должна быть замкнутой за период обращения  $2\pi$ . Это значит, что угловая скорость ротации  $\omega_\Phi$  от-

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a \left[ \cos \left( k \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\Psi t \right) \cos(\omega_\Psi t) + \sin \left( k \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\Psi t \right) \sin(\omega_\Psi t) \cos \Theta \right] + b \sin \Theta \sin(\omega_\Psi t) \\ y = a \left[ \cos \left( k \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\Psi t \right) \sin(\omega_\Psi t) - \sin \left( k \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\Psi t \right) \cos(\omega_\Psi t) \cos \Theta \right] - b \sin \Theta \cos(\omega_\Psi t) \\ z = -a \sin \left( k \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\Psi t \right) \sin \Theta + b \cos \Theta \end{array} \right.$$

Для того, чтобы траектория замыкалась за период  $t = 2\pi$  необходимо, чтобы коэффициент  $k$  был равен  $\frac{\cos \alpha}{\cos(\Theta + \alpha)}$ .

Таким образом, уравнение движения имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a(\cos^2(\omega_\Psi t) + \sin^2(\omega_\Psi t) \cos \Theta) + b \sin \Theta \sin(\omega_\Psi t), \\ y = a \sin(\omega_\Psi t) \cos(\omega_\Psi t) (1 - \cos \Theta) - b \sin \Theta \cos(\omega_\Psi t), \\ z = -a \sin(\omega_\Psi t) \sin \Theta + b \cos \Theta. \end{array} \right. \quad (3)$$

Если принять  $b = 0$ , то проекцию траектории (3) на плоскость  $XOY$  можно преобразовать к виду:

$$\left( x - a \cos^2 \frac{\Theta}{2} \right)^2 + y^2 = \left( a \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right)^2.$$

личается от скорости ротации в расчёте для 2К-Н. Поэтому длины дуг  $l_{MM_0}$  и  $l_{MN}$  не равны. Пусть они отличаются в некоторый коэффициент  $k$ :  $k \times l_{MM_0} = l_{MN}$ .

$$l_{MN} = R \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\Psi t, \quad l_{MM_0} = R(-\Phi),$$

$$k \times R \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\Psi t = R(-\Phi). \quad \text{Тогда угол собственного вращения определяется, как } \Phi = -k \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\Psi t.$$

Если теперь подставить функции  $\Phi = -k \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\Psi t$ ,  $\Psi = \omega_\Psi t$ ,  $\Theta = \text{const}$  в выражение (1), то получится уравнение движения такое же, как и в первой задаче, но с некоторым коэффициентом  $k$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a \left[ \cos \left( k \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\Psi t \right) \cos(\omega_\Psi t) + \sin \left( k \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\Psi t \right) \sin(\omega_\Psi t) \cos \Theta \right] + b \sin \Theta \sin(\omega_\Psi t) \\ y = a \left[ \cos \left( k \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\Psi t \right) \sin(\omega_\Psi t) - \sin \left( k \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\Psi t \right) \cos(\omega_\Psi t) \cos \Theta \right] - b \sin \Theta \cos(\omega_\Psi t) \\ z = -a \sin \left( k \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha} \omega_\Psi t \right) \sin \Theta + b \cos \Theta \end{array} \right.$$

Это уравнение окружности (рис. 9а) с центром в точке  $\left( a \cos^2 \frac{\Theta}{2}; 0; 0 \right)$  и радиусом  $a \sin^2 \frac{\Theta}{2}$ . Подробный вывод этих уравнений представлен в Приложении А.

Так как проекция траектории (3) на плоскость  $XOY$  является окружностью, то следовательно, уравнение движения (3) является линией пересечения сферы и прямого кругового цилиндра (рис. 9, б). Частный случай этой кривой при радиусе цилиндра равном половине радиуса сферы, то есть при  $\Theta = \frac{\pi}{2}$ , называется кривой Вивиани [19].

#### 4. Практическое исследование уравнений движения

Рассмотрим траекторию точки на сателлите для передачи 2К-Н (рис. 8). В отличие



от использованной математической модели в виде цилиндра, перекатывающегося по опорной плоскости, реальные прецессирующее и опорное колёса имеют зубчатый профиль. Это условие можно адаптировать для модели, добавив требование на точку контакта в определённом месте – выступах или впадинах зубьев опорного колеса.

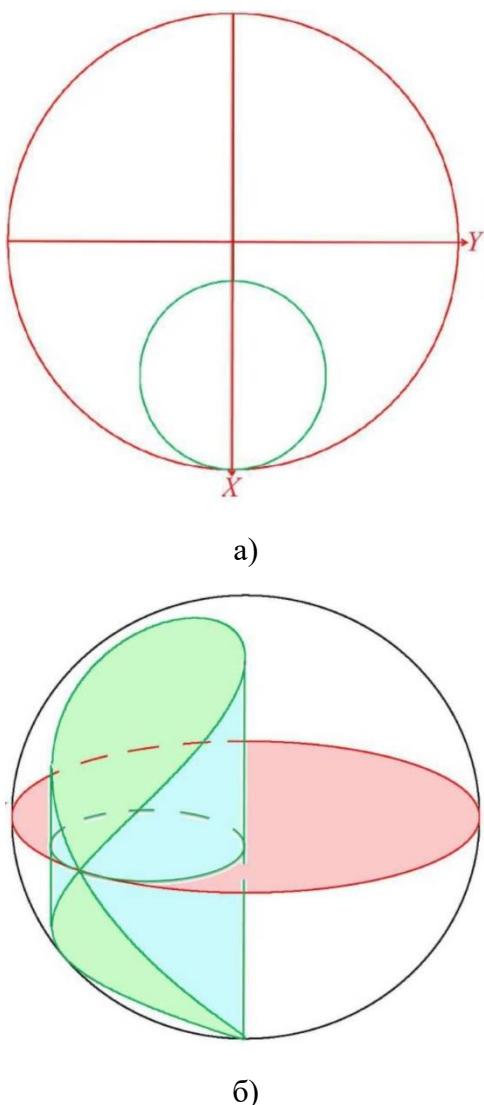


Рис. 9. Траектория точки для передачи К-Н-В: а – вид сверху; б – аксонометрия

Для рассматриваемой траектории будут справедливы те же утверждения, что и для траектории эксцентриковой передачи – гипоциклоиды. Гипоциклоида будет замкнутой, если отношение радиуса неподвижной окружности к радиусу подвижной можно представить в виде рациональной дроби. Для

прецессирующей передачи это требование преобразуется к виду:

$$\frac{SM}{OF} = \frac{a \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha}}{a} = \frac{\cos(\Theta + \alpha)}{\cos \alpha},$$

где  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{h}{2R}$ .

В общем случае, значения функций  $\cos(\Theta + \alpha)$  и  $\cos \alpha$  являются действительными числами. Угол  $\alpha$  полностью определяется геометрией сателлита, а значит, для плавности работы передачи требуется подбирать строго определённые числа угла  $\Theta$ .

Отношение радиусов можно заменить на отношение длин окружностей или отношение чисел зубьев на опорном и прецессирующем колёсах. Для минимизации габаритов передачи требуется уменьшать угол  $\Theta$ . При этом увеличивается количество точек опорной окружности (рис. 7), где происходит контакт с прецессирующим колесом и, соответственно, число зубьев на ней. Целесообразно использовать сателлит, количество зубьев которого на 1 больше, чем у опорного колеса.

Теперь проанализируем передачу К-Н-В. В авторских свидетельствах [4, 5] используются ограничительные пальцы. На рис. 7, б видно, что точка на сателлите описывает «восьмёрку» на поверхности сферы. Следовательно, для обеспечения плавности хода требуется, чтобы палец перемещался по пазу той же формы. Однако, выполнить паз в виде сферической «восьмёрки» и проконтролировать движение пальца по нему крайне сложно. Поэтому, в силу того, что в планетарных прецессирующих передачах углы нутации невелики (до  $10^\circ$ ), движение пальцев предлагается ограничивать прямолинейными пазами. При этом для крайнего значения угла  $\Theta = 10^\circ$  отношение радиуса цилиндра к радиусу сферы, которую он пересекает, составляет всего 0,0076. Это значит, что для сателлита радиусом  $R = 300$  мм и толщиной  $h = 50$  мм максимальное отклонение от прямолинейной траектории паза составит 2,3 мм, чем, в некоторых случаях, можно пренебречь. Зубчатая муфта позволяет реализовать более точную кинематику передачи.

Если дополнить компьютерные программы, использованные в статье [16], то методом последовательных положений, можно сформировать зубчатый профиль, который обеспечит плавность и точность передачи.

## 5. Заключение

В ходе исследования было проанализировано множество вариантов планетарных прецессирующих передач. Классифицированы способы генерации прецессирующих колебаний.

Для конфигураций вида 2К-Н и К-Н-В подробно изложена методика построения модели передачи и математического вывода закона движения характерных точек. Получены уравнения траектории.

Были проанализированы уравнения движения характерных точек и выявлено требование для определения угла нутации, обеспечивающего кинематическую точность передачи. Обоснован выбор сателлита с числом зубьев на 1 больше, чем у опорного колеса.

Полученные уравнения траектории, при помощи метода последовательных положений, позволяют смоделировать зубчатый профиль передач вида 2К-Н и К-Н-В. Созданная электронная модель позволит детальнее изучить процесс работы всех звеньев, их технические характеристики и подобрать технологические операции для его реализации.

Проделанные исследования помогут заполнить на рынке редукторостроения нишу, где востребованы передаточные отношения (числа) примерно 40-400.

## Приложение А

Для того, чтобы спроектировать уравнение движения (3) на плоскость  $XOY$  и убедиться, что траектория является линией пересечения кругового цилиндра и сферы, потребуется выполнить ряд математических преобразований. Уравнение проекции на плоскость обладает только двумя координатами:  $x$  и  $y$ . Координата  $z = 0$ . В таком случае уравнение (3) примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a(\cos^2(\omega_\Psi t) + \sin^2(\omega_\Psi t) \cos \Theta) + \\ \quad + b \sin \Theta \sin(\omega_\Psi t), \\ y = a \sin(\omega_\Psi t) \cos(\omega_\Psi t) (1 - \cos \Theta) - \\ \quad - b \sin \Theta \cos(\omega_\Psi t), \\ z = -a \sin(\omega_\Psi t) \sin \Theta + b \cos \Theta. \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a(\cos^2(\omega_\Psi t) + \sin^2(\omega_\Psi t) \cos \Theta) + \\ \quad + b \sin \Theta \sin(\omega_\Psi t), \\ y = a \sin(2\omega_\Psi t) \frac{1 - \cos \Theta}{2} - \\ \quad - b \sin \Theta \cos(\omega_\Psi t), \\ z = 0. \end{array} \right.$$

Уравнение окружности выводится при условии  $b = 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a(\cos^2(\omega_\Psi t) + \sin^2(\omega_\Psi t) \cos \Theta), \\ y = a \sin(2\omega_\Psi t) \frac{1 - \cos \Theta}{2}, \\ z = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Из второй строки системы (4) выражается:  $\sin(2\omega_\Psi t) = \frac{y}{a} \frac{2}{1 - \cos \Theta}$  и по основному тригонометрическому тождеству приводится к виду (5):

$$\cos(2\omega_\Psi t) = \pm \sqrt{1 - \frac{4y^2}{a^2(1 - \cos \Theta)^2}}. \quad (5)$$

Первую строку системы (4) можно преобразовать, воспользовавшись формулой понижения степени, а затем подставить в неё выражение (5):

$$\begin{aligned} x &= a(\cos^2(\omega_\Psi t) + \sin^2(\omega_\Psi t) \cos \Theta), \\ x &= a \left[ \frac{1 - \cos(2\omega_\Psi t)}{2} + \frac{1 + \cos(2\omega_\Psi t)}{2} \cos \Theta \right], \\ x &= \frac{a}{2} [1 - \cos(2\omega_\Psi t) + (1 + \cos(2\omega_\Psi t)) \cos \Theta], \\ x &= \frac{a}{2} [1 + \cos \Theta - \cos(2\omega_\Psi t) + \cos(2\omega_\Psi t) \cos \Theta], \end{aligned}$$

$$x = \frac{a}{2} \left[ 1 + \cos \Theta + \frac{(\cos \Theta - 1) \sqrt{a^2 (1 - \cos \Theta)^2 - 4y^2}}{a(1 - \cos \Theta)} \right],$$

$$2x = a(1 + \cos \Theta) - \sqrt{a^2 (1 - \cos \Theta)^2 - 4y^2},$$

$$\sqrt{a^2 (1 - \cos \Theta)^2 - 4y^2} = a(1 + \cos \Theta) - 2x,$$

$$a^2 (1 - 2 \cos \Theta + \cos^2 \Theta) - 4y^2 =$$

$$= a^2 (1 + 2 \cos \Theta + \cos^2 \Theta) - 4ya(1 + \cos \Theta) + 4x^2,$$

$$0 = 4x^2 + 4y^2 + 4a^2 \cos \Theta - 4ya(1 + \cos \Theta),$$

$$0 = x^2 + y^2 + a^2 \cos \Theta - ya(1 + \cos \Theta),$$

$$0 = x^2 + y^2 - ya(1 + \cos \Theta) + \frac{a^2 (1 + \cos \Theta)^2}{4} -$$

$$- \frac{a^2 (1 + \cos \Theta)^2}{4} + a^2 \cos \Theta,$$

$$0 = x^2 + \left( y - \frac{a(1 + \cos \Theta)}{2} \right)^2 - \frac{a^2 (1 + 2 \cos \Theta + \cos^2 \Theta)}{4} + \frac{a^2 4 \cos \Theta}{4},$$

$$0 = x^2 + \left( y - \frac{a(1 + \cos \Theta)}{2} \right)^2 - \frac{a^2 (1 - 2 \cos \Theta + \cos^2 \Theta)}{4},$$

$$x^2 + \left( y - \frac{a(1 + \cos \Theta)}{2} \right)^2 = \left( \frac{a(1 - \cos \Theta)}{2} \right)^2,$$

$$x^2 + \left( y - a \cos^2 \frac{\Theta}{2} \right)^2 = \left( a \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right)^2.$$

Последняя формула является уравнением окружности с центром в точке  $\left( 0; a \cos^2 \frac{\Theta}{2}; 0 \right)$  и радиусом  $a \sin^2 \frac{\Theta}{2}$ .

### Список литературы

1. Планетарный прецессионный редуктор / И.А. Бостан, В.Е. Дулгеру. - Авторское свидетельство СССР на изобретение №1481539. Заявл. 02.04.1987, №4236297. Опубл. 23.05.1989. Бюл. №19.
2. Планетарная прецессионная передача с выборкой зазора / В.М. Артеменко. - Авторское свидетельство СССР на изобретение №1703902. Заявл. 05.06.1989, №4698421. Опубл. 07.01.1992. Бюл. №1.
3. Двухступенчатая прецессионная передача / В.М. Белкин. - Авторское свидетельство СССР на изобретение №750186. Заявл. 08.02.1977, №2449681. Опубл. 23.07.1980. Бюл. №27.
4. Планетарная прецессионная передача / П.Ф. Деинеко, С.Н. Городняя. - Авторское свидетельство СССР на изобретение №1015162. Заявл. 18.12.1980, №3219450. Опубл. 30.04.1983. Бюл. №16.
5. Прецессионный редуктор / К.У. Кутыев, К.Н. Михеева, Б.И. Павлов. - Авторское свидетельство СССР на изобретение №588427. Заявл. 20.03.1972, №1760781. Опубл. 15.01.1978. Бюл. №2.

### References

1. Patent USSR 1481539. *Planetarnyu precessionnyu reduktor* [Planetary precession reducer]. Bostan I.A., Dulgheru V.E. Declared 02.04.1987. Published 23.05.1989. Bulletin No. 19. (in Russian).
2. Patent USSR 1703902. *Planetarnaya precessionnaya peredacha s vyborkoy zazora* [Planetary precession transmission from an elective gap]. Artemenko V.M. Declared 05.06.1989. Published 07.01.1992. Bulletin No. 1. (in Russian).
3. Patent USSR 750186. *Dvustupenchataya precessionnaya peredacha* [Two-stage precession transmission]. Belkin V.M. Declared 08.02.1977. Published 23.07.1980. Bulletin No. 27. (in Russian).
4. Patent USSR 1015162. *Planetarnaya precessionnaya peredacha* [Planetary precession transmission]. Deineko P.F., Gorodnaya S.N. Declared 18.12.1980. Published 30.04.1983. Bulletin No. 16. (in Russian).
5. Patent USSR 588427. *Precessionnyu reduktor* [Precession reducer]. Kutyev K.U., Mikheeva K.N., Pavlov B.I. Declared 20.03.1972. Published 15.01.1978. Bulletin



6. Планетарная прецессионная передача / И.А. Бостан. - Авторское свидетельство СССР на изобретение №1401203. Заявл. 26.05.1986, №4070973. Опубл. 07.06.1988. Бюл. №21.
7. Планетарная прецессионная передача / А.В. Кудрявцев. - Авторское свидетельство СССР на изобретение №1474362. Заявл. 04.05.1987, №4239931. Опубл. 23.04.1989. Бюл. №15.
8. Планетарная прецессионная передача / И.А. Бостан, В.Е. Дулгеру. - Авторское свидетельство СССР на изобретение №1714249. Заявл. 20.05.1986, №4085330. Опубл. 23.02.1992. Бюл. №7.
9. Прецессирующий редуктор / Ф.И. Плеханов, И.А. Пушкин - Патент РФ на изобретение №2694483, Заявл. 26.03.2018, №2018110759. Опубл. 15.07.2019. Бюл. №20.
10. Скобеда А.Т., Громыко П.Н., Лустенков М.Е. Минимизация потерь мощности при проектировании новых типов механических передач // Перспективные приводные системы, трансмиссии и робототехнические комплексы: материалы междунар. науч.-техн. конф. Могилев: БРУ, 2011, С. 11-14.
11. Bostan I., Dulgheru V. Study of the analytical description of nestandard tooth profile by using the system of equations // *Acta Technica Napocensis. Applied Mathematics and Mechanics*. 2013. Vol. 56. is. 4. pp. 621-624.
12. Лопатин Б.А., Полуэктов Е.А., Хаустов С.А. Формирование внутреннего приближенного зацепления цилиндро-конических передач // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия Машиностроение. 2011. №11. С. 62-69.
13. Лопатин Б.А., Зайнетдинов Р.И., Плотникова С.В. Контроль зубьев неевольвентной шестерни цилиндро-конической передачи // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия Машиностроение. 2014. Т. 14. №1. С. 52-58.
14. Громыко П.Н. Научные основы создания планетарных прецессионных передач No. 2. (in Russian).
6. Patent USSR 1401203. *Planetarnaya precessionnaya peredacha* [Planetary precession transmission]. Bostan I.A. Declared 26.05.1986. Published 07.06.1988. Bulletin No. 21. (in Russian).
7. Patent USSR 1474362. *Planetarnaya precessionnaya peredacha* [Planetary precession transmission]. Kudryavtsev A.V. Declared 04.05.1987. Published 23.04.1989. Bulletin No. 15. (in Russian).
8. Patent USSR 1714249. *Planetarnaya precessionnaya peredacha* [Planetary precession transmission]. Bostan I.A., Dulgheru V.E. Declared 20.05.1986. Published 23.02.1992. Bulletin No. 7. (in Russian).
9. Patent RU 2694483. *Precessiruyushchiy reduktor* [Precessing Reduction Gear]. Plekhanov F.I., Pushkarev I.A., Pushkareva T.A., Pervushin G.N. Declared 26.03.2018. Published 15.07.2019. Bulletin No. 20. (in Russian).
10. Skoibeda A.T., Gromyko P.N., Lustenkov M.E. Minimizing power losses when designing new types of mechanical transmissions. *Perspektivnye privodnye sistemy, transmissii i robototekhnicheskiye kompleksy: materialy mezhd. nauch.-tech. konf.* [Promising Drive Systems, Transmissions and Robotic Complexes: Materials of the Int. Sci.-Tech. conf.]. Mogilev, BRU, 2011, pp.11-14 (in Russian).
11. Bostan I., Dulgheru V. Study of the analytical description of nestandard tooth profile by using the system of equations. *Acta Technica Napocensis. Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, Vol. 56, is. 4, pp. 621-624.
12. Lopatin B.A., Poluektov E.A., Khaustov S.A. Formation of an approximate internal tooth for cylindrical-conic gears. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Mashinostroenie*, 2011, no.11, pp. 62-69. (in Russian).
13. Lopatin B.A., Zaynetdinov R.I., Plotnikova S.V. Control of cylinder-conical cogs referral. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Mashinostroenie*, 2014, Vol. 14 no.1, pp. 52-58. (in Russian).



с коническо-цилиндрическим зацеплением: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Минск, 2002. 43 с.

15. Гончаров П.С. Основные параметры прецессионной роликовой передачи при различных вариантах ее структурного исполнения // Вестник Белорусско-Российского университета. 2012. №3(36). С. 17-26.

16. Громыко П.Н., Галюжин Д.С., Доконов Л.Г., Трусов И.В. Разработка методики исследования плавности работы планетарной прецессионной передачи на основе использования методов компьютерного моделирования // Вестник Белорусско-Российского университета. 2007. №1(14). С. 82-89.

17. Громыко П.Н., Жолобов А.А., Доконов Л.Г. Технология формообразования поверхностей зубьев сателлита планетарной прецессионной передачи с использованием упрощенных профилей // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. 2009. №8. С. 58-62.

18. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 2010. 416 с.

19. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. Санкт-Петербург: Лань, 2025. 608 с.

14. Gromyko P.N. *Nauchnye osnovy sozdaniya planetarnykh precessionnykh peredach s konichesko-cilindricheskim zacepleniem* [Scientific foundations of the creation of planetary precession gears with conical-cylindrical gearing]. Abstract of Diss. Doc. Sci. (Engineering). Minsk, 2002, 43p. (in Russian).

15. Goncharov P.S. The main parameters of the precession roller transmission in various variants of its structural design. *Vestnik Belarussko-Rossiyskogo Universiteta*, 2012, no.3(36), pp.17-26 (in Russian).

16. Gromyko P.N., Galyuzhin D.S., Dokonov L.G, Trusov I.V. Development of a methodology for investigating the smooth operation of planetary precession transmission based on the use of computer modeling methods. *Vestnik Belarussko-Rossiyskogo Universiteta*, 2007, no.1(14), pp.82-89 (in Russian).

17. Gromyko P.N., Zholobov A.A., Dokonov L.G. Technology of shaping the tooth surfaces of a planetary precession transmission satellite using simplified profiles. *Vestnik Polotskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya V. Promyshlennost. Tekhnicheskiye nauki*, 2009, no.8, pp.58-62. (in Russian).

18. Targ S.M. *Kratkiy kurs teoreticheskoy mekhaniki* [A short course in theoretical mechanics]. Moscow, Vishaya shkola Publ., 2010. 416p. (in Russian).

19. Fikhtenholts G.M. *Kurs differentsiyalnogo i integralnogo ischisleniya. T.1* [Course of differential and integral calculus. Vol.1], St. Petersburg, Lan, 2025. 608p. (in Russian).