

УДК (UDK) 62-529

РАСЧЕТ ТРАЕКТОРИИ ПОВОРОТА БЕСПИЛОТНОЙ МАШИНЫ С ПЕРЕДНИМИ
УПРАВЛЯЕМЫМИ КОЛЕСАМИCALCULATION OF THE TURNING TRAJECTORY OF AN UNMANNED VEHICLE
WITH FRONT STEERABLE WHEELSСухарев Р.Ю., Беляев К.В., Лазута И.В.
Sukharev R. Yu., Belyaev K. V., Lazuta I. V.Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет (Омск, Россия)
Siberian State Automobile and Highway University (Omsk, Russian Federation)

Аннотация. Траектория движения беспилотной машины может быть представлена совокупностью элементарных движений, одним из которых является поворот на заданный угол. Для расчета траектории поворота в работе была составлена расчетная схема, математическая модель движения машины и проведены теоретические исследования влияния основных конструктивных и эксплуатационных параметров машины на характеристики траектории поворота. В результате проведенных исследований были получены аналитические зависимости длины маневра и времени подачи сигнала от скорости машины, длины ее базы и заданного угла поворота. Полученные зависимости позволяют рассчитывать координаты точки начала маневра и длительность управляющего сигнала на рулевое управление для совершения маневра в соответствии с заданной траекторией.

Ключевые слова: беспилотная машина, траектория движения, поворот.

Дата получения статьи: 24.02.2025
Дата принятия к публикации: 25.04.2025
Дата публикации: 25.06.2025

Сведения об авторах:

Сухарев Роман Юрьевич – доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Автоматизация и энергетическое машиностроение», ФГБОУ ВО «СибАДИ», e-mail: suharev_ry@mail.ru.
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2627-8110>

Беляев Константин Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Эксплуатация нефтегазовой и строительной техники», ФГБОУ ВО «СибАДИ», e-mail: bkv775@mail.ru.
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9443-0903>

Лазута Иван Васильевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Автоматизация и энергетическое машиностроение», ФГБОУ ВО «СибАДИ», e-mail: livne@mail.ru.
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-1252-1829>

Abstract. The trajectory of an unmanned vehicle can be represented by a set of elementary movements, one of which is a turn at a given angle. To calculate the turning trajectory, a calculation scheme was drawn up, a mathematical model of the movement of the machine and theoretical studies of the influence of the main design and operational parameters of the machine on the characteristics of the turning trajectory were carried out. As a result of the conducted research, analytical dependences of the length of the maneuver and the time of giving the signal on the speed of the machine, the length of its base and the set angle of rotation were obtained. The obtained dependencies allow us to calculate the coordinates of the maneuver start point and the duration of the steering control signal to perform the maneuver in accordance with a given trajectory.

Keywords: unmanned vehicle, movement trajectory, turn.

Date of manuscript reception: 24.02.2025
Date of acceptance for publication: 25.04.2025
Date of publication: 25.06.2025

Authors' information:

Roman Yu. Sukharev – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department «Automation and Power Engineering» at Siberian State Automobile and Highway University, e-mail: suharev_ry@mail.ru.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2627-8110>

Konstantin V. Belyaev – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Department «Operation of oil and gas and construction machinery» at Siberian State Automobile and Highway University, e-mail: bkv775@mail.ru.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9443-0903>

Ivan V. Lazuta – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Department «Automation and Power Engineering» at Siberian State Automobile and Highway University, e-mail: livne@mail.ru.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-1252-1829>

1. Введение

Траектория движения беспилотной наземной машины может быть представлена совокупностью элементарных траекторий: движение по прямой, поворот на определенный угол, смена полосы движения («переставка»).

Вопросом планирования траектории поворота беспилотных машин занимались многие исследователи. В работах [1,2] получены параметрические уравнения параметров траектории поворота колесной машины и проведена их оценка. В работе [3] предложена методика моделирования траектории поворота колесной машины. В работе [4] для поворота машин на перекрестке предложен метод задания направляющей линии. В работе [5] анализируется и моделируется распределение траекторий движения транспортных средств, выполняющих левый поворот. В работах [6,7] был предложен и протестирован подход к моделированию, основанный на принципе минимального рывка, для оценки траекторий движения автомобиля при повороте. В работе [8] для поворота предлагается использовать переходную кривую, кривизна которой и угол касательной к кривой описываются с помощью тригонометрической функции. В работе [9] для планирования траектории поворота робота предложено использовать кривые Ламе. В работе [10] предложен планировщик поворота с использованием метода обнаружения столкновений. В работе [11] предложен алгоритм построения траектории при развороте автогрейдера.

При совершении поворота машина движется по траектории, которая называется клотоидой, т.е. траектория у которой радиус кривизны изменяется как функция пути [12]. Изучению клотоидного метода посвящено большое количество работ. В работе [13] проведена оценка параметров клотоидной траектории входа в поворот колесной машины. В работе [14] данный метод применяется для построения траектории ухода от столкновения на соседнюю полосу совместно с торможением. В работе [15] данный метод позволяет плавно изменять траекторию для

исключения опрокидывания автомобиля. В работе [16] на клотоидах основан контроллер парковки автомобиля. В работе [17] клотоидный метод применяется для плавного возврата самолета на траекторию. В работе [18] данный метод используется для уменьшения числа путевых точек, по которым строится траектория. В работе [19] предлагается использовать данный метод для сглаживания кривой управления, рассчитанной по методу чистого преследования (Pure Pursuit). В работе [12] на основе клотоидных траекторий исследован маневр «переставка».

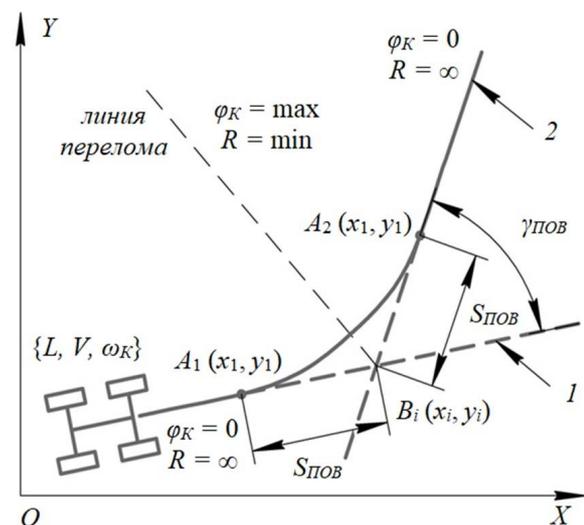


Рис. 1. Схема поворота беспилотной машины: 1 – текущая траектория движения; 2 – новая траектория движения; L – длина базы машины; V – скорость машины; ω_K – скорость поворота передних колес; R – радиус поворота; $S_{пов}$ – длина маневра (поворота); $\gamma_{пов}$ – угол поворота траектории; φ_K – угол поворота передних колес; A_1 – точка начала маневра; A_2 – точка завершения маневра.

Траектория поворота может быть задана как пересечение двух прямых на координатной плоскости (рис. 1). Машина движется по траектории 1 и должна повернуть на траекторию 2. Для точного выполнения данного маневра необходимо заранее рассчитать координаты точки A_1 , в которой необходимо начать поворот и время подачи управляющего сигнала на рулевое управление $t_{пов}$. Эти параметры будут зависеть от многих факторов, основными из которых являются: ско-

рость движения машины, длина базы машины, угол поворота траектории.

2. Постановка задачи исследования

Машина с длиной базы L , скоростью поворота передних управляемых колес ω_K движется по траектории $y_i = f_i(x)$ со скоростью V . Новая траектория $y_{i+1} = f_{i+1}(x)$ пересекает старую в точке $B_i(x_i, y_i)$ и образует с ней угол $\gamma_{ПОВ}$.

Необходимо рассчитать, в какой точке необходимо начать поворот и какой длительности должен быть управляющий сигнал.

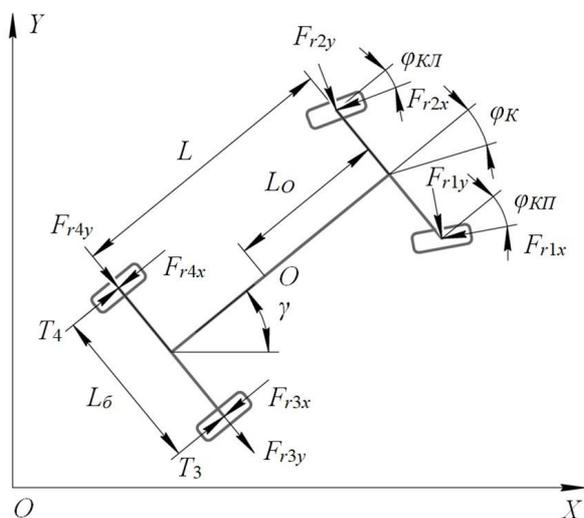


Рис. 2. Плоская расчетная схема динамики процесса поворота беспилотной машины: T_i – сила тяги на ведущих колесах машины; F_{rix} – продольная сила реакции на колесах машины; F_{riy} – поперечная сила реакции на колесах машины; γ – угол азимута машины; ϕ_K – средний угол поворота передних колес машины; L – длина базы машины; L_δ – ширина машины; L_O – расстояние от передней оси до центра масс машины (точка O)

Цель работы – вывести аналитические зависимости длины маневра $S_{ПОВ} = f(L, V, \gamma_{ПОВ})$ и времени подачи сигнала $t_{ПОВ} = f(L, V, \gamma_{ПОВ})$ для управления беспилотной машиной в процессе совершения маневра (поворота).

3. Математическая модель

Математическому описанию процесса поворота машин посвящено большое число

работ [20 - 25].

Для математического описания динамики процесса поворота колесной машины была составлена плоская расчетная схема поворота машины с передними поворотными колесами (рис. 2).

Движение машины, представленной на рис. 2 может быть описано системой уравнений [20, 21, 25]:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = (T_3 + T_4) \cos \gamma - (F_{r3x} + F_{r4x}) \cos \gamma + \\ + (F_{r3y} + F_{r4y}) \sin \gamma - (F_{r1x} + F_{r2x}) \cos(\gamma + \phi_K) - \\ - (F_{r1y} + F_{r2y}) \sin(\gamma + \phi_K); \\ m\ddot{y} = (T_3 + T_4) \sin \gamma - (F_{r3x} + F_{r4x}) \sin \gamma + \\ + (F_{r3y} + F_{r4y}) \cos \gamma - (F_{r1x} + F_{r2x}) \sin(\gamma + \phi_K) - \\ - (F_{r1y} + F_{r2y}) \cos(\gamma + \phi_K); \\ J\ddot{\gamma} = (T_4 - T_3 + F_{r3x} - F_{r4x}) \cdot L_\delta / 2 - \\ - (F_{r3y} + F_{r4y})(L - L_O) - \\ - F_{r1x}(L_O \sin \phi_K - L_\delta / 2 \cdot \cos \phi_K) - \\ - F_{r2x}(L_O \sin \phi_K + L_\delta / 2 \cdot \cos \phi_K) + \\ + F_{r1y}(L_O \cos \phi_K - L_\delta / 2 \cdot \sin \phi_K) + \\ + F_{r2y}(L_O \cos \phi_K + L_\delta / 2 \cdot \sin \phi_K), \end{cases} \quad (1)$$

где m – масса машины; x – перемещение центра масс машины (точка O) вдоль оси OX ; y – перемещение центра масс машины (точка O) вдоль оси OY ; T_i – сила тяги на ведущих колесах машины; F_{rix} – продольная сила реакции на колесах машины; F_{riy} – поперечная сила реакции на колесах машины; γ – угол азимута машины; ϕ_K – средний угол поворота передних колес машины; J – момент инерции машины; L – длина базы машины; L_δ – ширина машины; L_O – расстояние от передней оси до центра масс машины (точка O).

Сила тяги, развиваемая ведущими колесами машины зависит от вертикальной реакции на соответствующем колесе [21, 25]

$$T_i = \theta_{мяг} f_{ц} F_{riz}, \quad (2)$$

где $\theta_{мяг}$ – коэффициент, учитывающий степень использования максимальной силы тяги колесного тягача ($\theta_{мяг} = 0,70 \dots 0,73$ при буксовании $\delta = 20\%$); $f_{ц}$ – коэффициент сцепления шины с грунтом.

Вертикальная составляющая реакции на

передних (ведомых) колесах может быть представлена в виде [21, 25]

$$F_{rz.nep} = \frac{-G[(L_{2p} - L_0)(1 + \rho\theta_{mz}f_{cu}) - L_{2p} - \theta_{mz}f_{cu}h_p]}{[L_{1p}(1 + \rho\theta_{mz}f_{cu}) + L_{2p} + \theta_{mz}f_{cu}h_p]}, \quad (3)$$

на задних (ведущих) колесах [21, 25]

$$F_{rz.zad} = \frac{G - F_{rz.nep}}{1 + \rho\theta_{mz}f_{cu}}. \quad (4)$$

Боковые составляющие сил реакций на колесах выполняют роль удерживающих связей. Их предельное значение можно определить с помощью зависимости [21, 25]

$$F_{ry} = f_{cu.бок} \cdot F_{riz}, \quad (5)$$

где $f_{cu.бок}$ – коэффициент сцепления колеса с опорной поверхностью в боковом направлении по отношению к направлению качения.

Если обозначить суммарные боковые активные силы, действующие на колеса, соответственно $\sum F_{i.бок}$, то в аналитической форме можно записать [21, 25]

$$F_{ry} = \begin{cases} \sum F_{i.бок}, & \text{при } \sum F_{i.бок} \leq f_{cu.бок} \cdot F_{riz}; \\ f_{cu.бок} \cdot F_{riz}, & \text{при } \sum F_{i.бок} > f_{cu.бок} \cdot F_{riz}. \end{cases} \quad (6)$$

Продольные составляющие реакций на колесах являются силами сопротивления перекачиванию и зависят от вертикальных составляющих силы реакции и типа опорной поверхности [21, 25]

$$F_{rix} = f_{cu} \cdot F_{riz}. \quad (7)$$

Важной составляющей математической модели динамики процесса поворота колесной машины является математическая модель качения колеса по деформируемому основанию. Для описания данной модели была составлена расчетная схема (рис. 3) [21].

Под действием вертикальной нагрузки G_i и толкающей силы P_{ix} грунт сминается под колесом, а равнодействующая его реакции F_{ri} проходит через ось колеса. Ее составляющие находятся из рассмотрения проекций сил на горизонтальную и вертикальную оси [21]:

$$F_{riz} = G_i; F_{rix} = P_{ix}. \quad (8)$$

Из уравнения моментов сил относительно точки M

$$P_{ix} \cdot r_{ki} = F_{riz} \cdot \lambda + F_{rix} \cdot b, \quad (9)$$

учитывая (8) получим

$$P_{ix} = G_i \cdot \lambda / (r_{ki} - b). \quad (10)$$

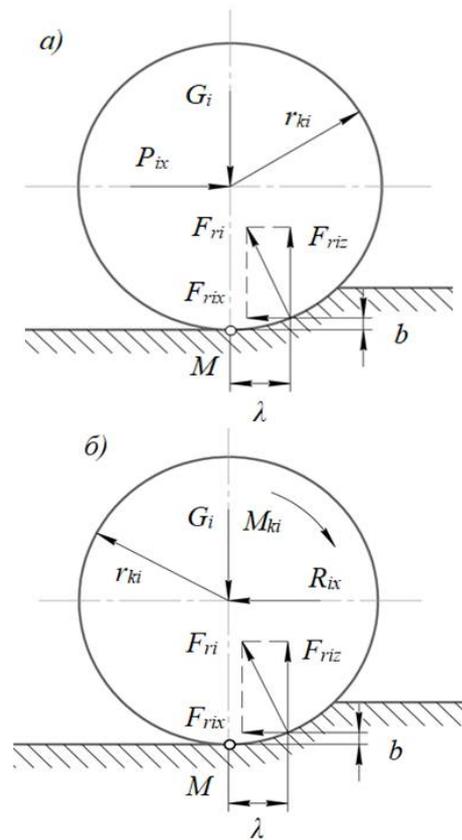


Рис. 3. Расчетная схема качения колес машины по деформируемому основанию: а – ведомого; б – ведущего (G_i – сила тяжести на колесе; P_{ix} – толкающая сила на колесе;

F_{ri} – равнодействующая сил реакции на колесе; λ – горизонтальное смещение точки приложения сил; b – вертикальное смещение точки приложения сил; M_{ki} – крутящий момент на колесе; R_{ix} – горизонтальная сила реакции от машины; r_{ki} – радиус колеса)

В (10) коэффициент сопротивления качению $f = \lambda / (r_{ki} - b)$ зависит от механических свойств грунта. Таким образом, сила, которую необходимо приложить к колесу для его равномерного движения [21]:

$$F_{rix} = G_i \cdot f. \quad (11)$$

Движение ведущего колеса отличается от движения ведомого наличием крутящего момента, приложенного к его оси. Уравнения равновесия колеса можно записать в виде [21]:

$$\begin{cases} F_{riz} = G_i; \\ M_{ki} = P_{ix} \cdot r_{ki} + F_{riz} \cdot \lambda + F_{rix} \cdot b. \end{cases} \quad (12)$$

Из соотношений, выведенных для ведомого колеса, следует [21]:

$$\begin{aligned}
 & F_{riz} \cdot \lambda + F_{rix} \cdot b = \\
 & = F_{riz} \cdot \lambda + F_{rix} \frac{\lambda}{r_{ki} - b} b =, \quad (13) \\
 & = \frac{F_{riz} \cdot \lambda}{r_{ki} - b} r_k = F_{rix} \cdot r_{ki}
 \end{aligned}$$

тогда последнее соотношение в системе (12) получает вид

$$M_{ki} / r_{ki} = R_{ix} + F_{rix}. \quad (14)$$

Величина M_{ki} / r_{ki} является тяговой силой [21]

$$T_i = M_{ki} / r_{ki}. \quad (15)$$

Из второго выражения системы (12) следует, что ведущее колесо способно преодолеть некоторую избыточную силу R_{ix} , равную разности между тяговой силой T_i и силой сопротивления качению колеса G_{if} , которая через опоры ведущего моста передается на остов и может быть реализована на преодоление сопротивления качению ведомых колес, сопротивления перемещению рабочего органа и ускорение машины [21].

Тяговая сила определяется крутящим моментом двигателя M и параметрами силовой передачи

$$T_i = M i_{TP} \eta_{TP} / r_{ki}, \quad (16)$$

где i_{TP} , η_{TP} – передаточное число и КПД трансмиссии.

Совокупность формул (1) – (16) позволила составить имитационную модель для дальнейших исследований.

Форма управляющего воздействия на рулевое управление машины представлена на рис. 4.

4. Результаты исследований

В ходе теоретических исследований были выбраны параметры машины, оказывающие наибольшее влияние на процесс поворота: скорость машины V , длина базы машины L и время подачи сигнала управления $t_{ПОВ}$. Для данных параметров были заданы следующие пределы варьирования: $V = 0,5 \dots 1$ м/с; $t_{ПОВ} = 1 \dots 5$ с; $L = 5 \dots 9$ м. При варьировании данных параметров на имитационной модели были получены значения угла поворота $\gamma_{ПОВ}$ машины. В табл. 1 приведены примеры для длины базы машины $L = 5$ м.

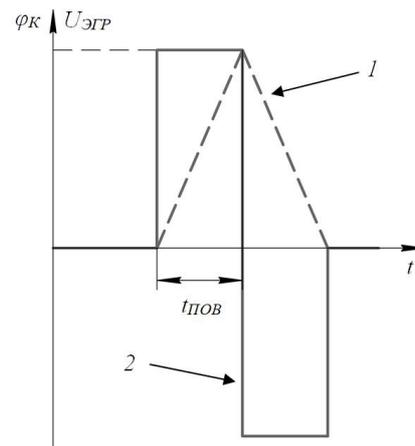


Рис. 4. Форма управляющего воздействия на рулевое управление машины: 1 – угол поворота передних колес φ_k ; 2 – напряжение на электрогидрораспределителе рулевого управления $U_{ЭГР}$; $t_{ПОВ}$ – время подачи сигнала управления

Полученные значения были представлены в виде группы поверхностей на рис. 5. Из полученных зависимостей можно сделать вывод о значительном влиянии выбранных параметров на угол поворота машины. Данные зависимости были аппроксимированы с помощью метода наименьших квадратов степенными функциями, пример аппроксимации приведен на рис. 6.

После аппроксимации была получена единая аналитическая зависимость угла поворота машины $\gamma_{ПОВ}$ от скорости V , длины базы L и времени подачи сигнала $t_{ПОВ}$

$$\gamma_{ПОВ} = \frac{9 \cdot V \cdot t_{ПОВ}^{2,276}}{L}. \quad (17)$$

Аналитическая зависимость (17) позволила путем простых преобразований вывести зависимость времени подачи сигнала $t_{ПОВ}$ для совершения поворота на заданный угол $\gamma_{ПОВ}$

$$t_{ПОВ} = 2,276 \sqrt{\frac{\gamma_{ПОВ} \cdot L}{9 \cdot V}}. \quad (18)$$

Правомерность данной зависимости была подтверждена путем сравнения со значениями, полученными на имитационной модели.

Далее были проведены исследования зависимости длины маневра $S_{ПОВ}$ от угла поворота $\gamma_{ПОВ}$, длины базы L и скорости машины V . Полученные зависимости представлены на рис. 7.

Таблица 1

Значения угла поворота $\gamma_{\text{ПОВ}}$ при различной скорости машины V и различном времени подачи управляющего воздействия $t_{\text{ПОВ}}$

$V t_{\text{ПОВ}}$	1	2	3	4	5
0,5	1,44	5,89	13,7	25,9	44,1
0,6	1,73	7,06	16,5	31,1	52,9
0,7	2,02	8,24	19,2	36,2	61,7
0,8	2,31	9,42	21,9	41,4	70,5
0,9	2,59	10,6	24,7	46,6	79,3
1	2,88	11,8	27,5	51,8	88,2

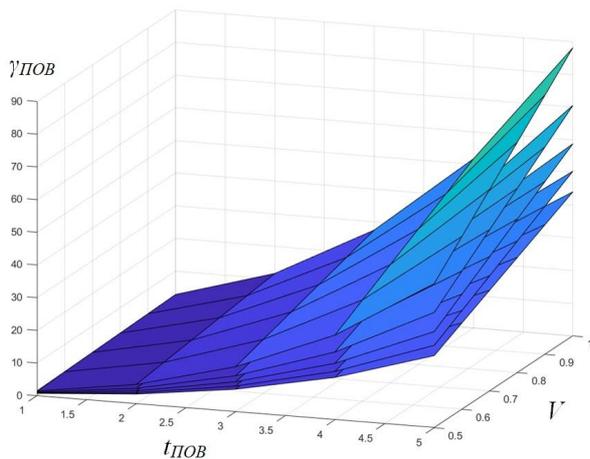


Рис. 5. Зависимости угла поворота $\gamma_{\text{ПОВ}}$ от скорости машины V , длины базы машины L и времени подачи сигнала управления $t_{\text{ПОВ}}$

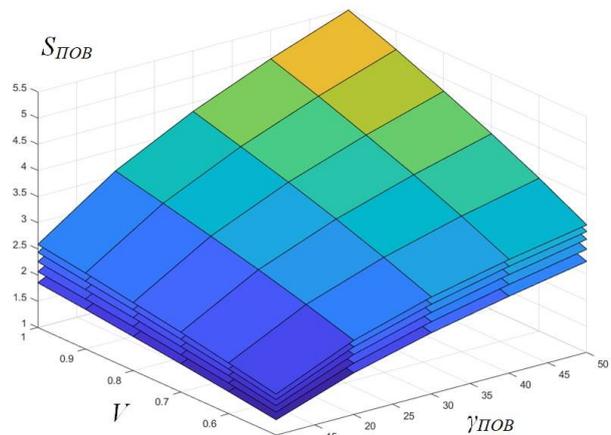


Рис. 7. Зависимости длины маневра $S_{\text{ПОВ}}$ от скорости машины V , длины базы машины L и угла поворота $\gamma_{\text{ПОВ}}$

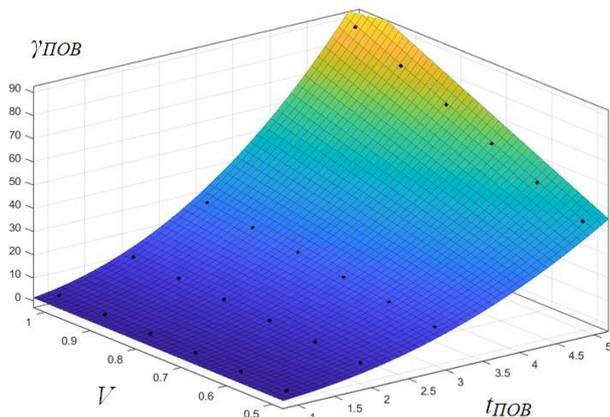


Рис. 6. Аппроксимация зависимости угла поворота $\gamma_{\text{ПОВ}}$ от скорости машины V и времени подачи сигнала управления $t_{\text{ПОВ}}$

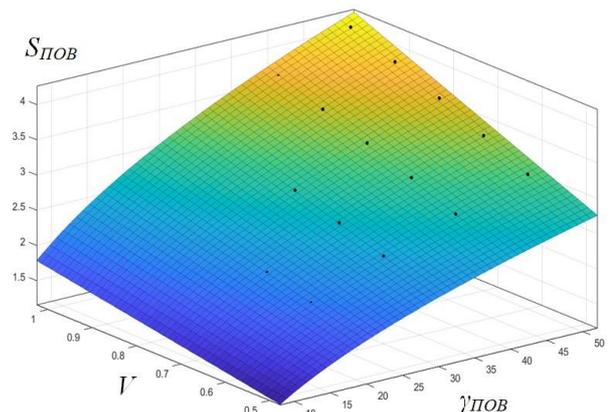


Рис. 8. Аппроксимация зависимости длины маневра $S_{\text{ПОВ}}$ от скорости машины V и угла поворота $\gamma_{\text{ПОВ}}$

Данные зависимости были аппроксимированы методом наименьших квадратов (рис. 8) и получена аналитическая зависимость длины маневра $S_{\text{ПОВ}}$ от угла поворота $\gamma_{\text{ПОВ}}$, длины базы L и скорости машины V :

$$S_{\text{ПОВ}} = (0,263 \cdot V + 0,13) \cdot L^{0,4} \cdot \gamma_{\text{ПОВ}}^{0,46} \quad (19)$$

ты точки начала поворота и время подачи сигнала управления в зависимости от заданных траекторий движения.

Данный алгоритм был протестирован на имитационной модели. В результате были получены траектории движения для различных значений длины базы машины L , скорости движения машины V и заданного угла поворота $\gamma_{пов}$.

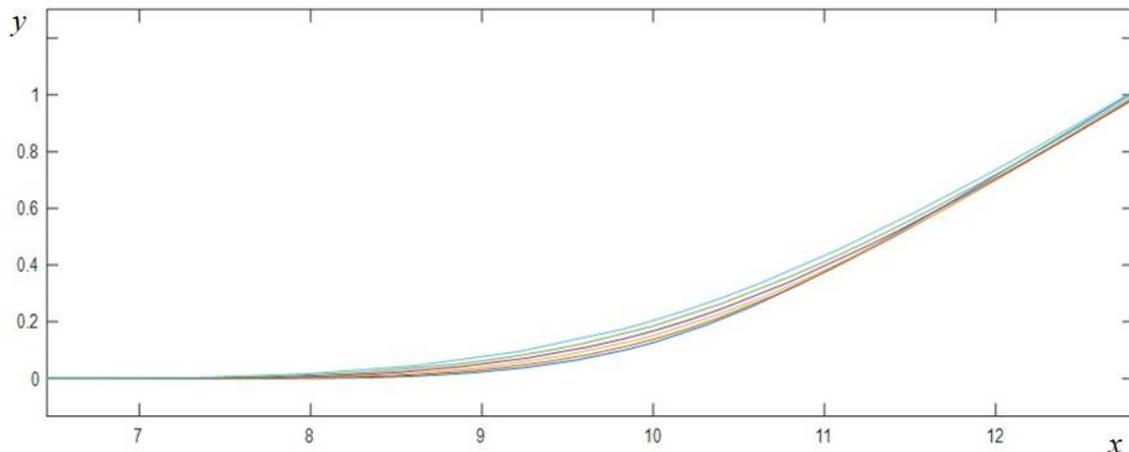


Рис. 9. Пример траекторий поворота машины с длиной базы 5 метров на угол 20 градусов с различными значениями скорости движения при условии пересечения траекторий в точке (10,0)

5. Заключение

В ходе исследования была составлена математическая модель движения машины с передними управляемыми колесами. Проведены теоретические исследования влияния основных конструктивных (длина базы машины L) и эксплуатационных (скорость машины V и угол поворота $\gamma_{пов}$) параметров машины на длину маневра $S_{пов}$ и время подачи управляющего сигнала $t_{пов}$.

Список литературы

1. Беляев А.Н., Шацкий В.П., Тришина Т.В. Методика определения теоретической траектории поворота колесной машины // Вестник Воронежского государственного аграрного университета. 2023. Т. 16, № 1(76). С. 90-97. DOI: 10.53914/issn2071-2243_2023_1_90.

2. Беляев А.Н., Афоничев Д.Н., Тришина Т.В., Высоккая И.А. Оценка параметров кривой траектории на участке входа в поворот колесной машины // Вестник Воро-

Пример выполнения поворота на 20 градусов при разной скорости в точке пересечения траекторий (10,0) с использованием полученных зависимостей представлен на рис. 9.

Полученные в результате проведенных исследований аналитические зависимости (18) и (19) были использованы для создания алгоритма управления поворотом беспилотной машины с передними управляемыми колесами, который позволяет рассчитать координаты точки начала поворота и время подачи сигнала управления в зависимости от заданных траекторий движения при выполнении поворота. Пример использования полученных зависимостей представлен на рис. 9.

References

1. Belyaev A.N., Shatsky V.P., Trishina T.V. Methodology for determining the theoretical trajectory of a wheeled vehicle. *Vestnik Voronezskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta*, 2023, Vol.16, No.1(76), pp. 90-97. DOI: 10.53914/issn2071-2243_2023_1_90. (In Russian)

2. Belyaev A.N., Afonichev D.N., Trishina T.V., Vysotskaya I.A. Estimation of trajectory curve parameters at the entrance to the turn of a wheeled vehicle. *Vestnik Voronezskogo go-*

нежского государственного аграрного университета. 2023. Т. 16, № 2(77). С. 124-135. DOI: 10.53914/issn2071-2243_2023_2_124.

3. Беляев А.Н., Тришина Т.В., Новиков А.Е. Методика аналитического определения действительной траектории поворота колесной машины // Вестник Воронежского государственного аграрного университета. 2023. Т. 16, № 3(78). С. 151-158. DOI: 10.53914/issn2071-2243_2023_3_151.

4. Wei F., Guo W., Liu X., Liang C., Feng T, Left-Turning Vehicle Trajectory Modeling and Guide Line Setting at the Intersection // *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2014. С. 950219. DOI: 10.1155/2014/950219.

5. Alhajyaseen W., Iryo-Asano M., Suzuki K., Nakamura H. Modeling the Variation in the Trajectory of Left Turning Vehicles Considering Intersection Geometry // *Proceedings of the Transportation Research Board 90th Annual Meeting Transportation Research Board, Washington, DC, USA, 23–27 January 2011*.

6. Dias C., Iryo-Asano M., Oguchi T. Predicting Optimal Trajectory of Left-Turning Vehicle at Signalized Intersection // *Transportation Research Procedia*. С. 240–250. DOI: 10.1016/j.trpro.2017.03.093.

7. Dias C., Iryo-Asano M., Abdullah M., Oguchi T., Alhajyaseen W. Modeling Trajectories and Trajectory Variation of Turning Vehicles at Signalized Intersections // *IEEE Access*. 2020. Т.8. С. 109821-109834. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3002020.

8. Boryga M. Trajectory Planning For Tractor Turning Using The Trigonometric Transition Curve // *Agricultural Engineering*. 2023. Т. 27. С. 203-212. DOI: 10.2478/agriceng-2023-0015.

9. Wu X., Angeles J., Zou T., Yang J., Li H., Li W. Trajectory Planning With Lamé-Curve Blending for Motor-Saturation Avoidance Upon Mobile-Robot Turning // *IEEE Access*. 2020. Т.8. С. 58483-58496. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2982740.

10. Wei P. Efficient and Safe Trajectory Planning for Autonomous Agricultural Vehicle Headland Turning in Cluttered Orchard Environments // *IEEE Robotics and Automation Letters*. 2025. DOI: 10.1109/LRA.2025.3534056

11. Sukharev R.Y. Trajectory plotting algo-

† *sdarstvennogo agrarnogo universiteta*, 2023, Vol.16, No.2(77), pp. 124-135. DOI: 10.53914/issn2071-2243_2023_2_124. (In Russian)

† 3. Belyaev A.N., Trishina T.V., Novikov A.E. Method of analytical determination of the actual turning trajectory of a wheeled vehicle. *Vestnik Voronegskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta*, 2023, Vol. 6, No. 3(78), pp. 151-158. DOI: 10.53914/issn2071-2243_2023_3_151. (In Russian)

† 4. Wei F., Guo W., Liu X., Liang C., Feng T, Left-Turning Vehicle Trajectory Modeling and Guide Line Setting at the Intersection. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2014, 950219. DOI: 10.1155/2014/950219.

† 5. Alhajyaseen W., Iryo-Asano M., Suzuki K., Nakamura H. Modeling the Variation in the Trajectory of Left Turning Vehicles Considering Intersection Geometry. *Proceedings of the Transportation Research Board 90th Annual Meeting Transportation Research Board, Washington, DC, USA, 23–27 January 2011*.

† 6. Dias C., Iryo-Asano M., Oguchi T. Predicting Optimal Trajectory of Left-Turning Vehicle at Signalized Intersection. *Transportation Research Procedia*, 21, pp. 240–250. DOI:10.1016/j.trpro.2017.03.093.

† 7. Dias C., Iryo-Asano M., Abdullah M., Oguchi T., Alhajyaseen W. Modeling Trajectories and Trajectory Variation of Turning Vehicles at Signalized Intersections. *IEEE Access*, 2020, Vol. 8, pp. 109821-109834. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3002020.

† 8. Boryga M. Trajectory Planning For Tractor Turning Using The Trigonometric Transition Curve. *Agricultural Engineering*. 2023, Vol.27, No.1, pp. 203-212. DOI: 10.2478/agriceng-2023-0015.

† 9. Wu X., Angeles J., Zou T., Yang J., Li H., Li W. Trajectory Planning With Lamé-Curve Blending for Motor-Saturation Avoidance Upon Mobile-Robot Turning. *IEEE Access*, 2020, Vol.8, pp. 58483-58496. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2982740.

† 10. Wei P. Efficient and Safe Trajectory Planning for Autonomous Agricultural Vehicle Headland Turning in Cluttered Orchard Environments. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2025. DOI: 10.1109/LRA.2025.3534056.

rithm for a self-driving road grader // *Journal of Physics: Conference Series*. Vladivostok, 2021. P. 012181. DOI: 10.1088/1742-6596/2096/1/012181.

12. Sukharev R.Yu., Letopolsky A.B., Sachuk A.Yu. A mathematical model of the movement of an unmanned tractor with front steerable wheels during the «rearrangement» maneuver // *Tractors and Agricultural Machinery*. 2024. DOI: 10.17816/0321-4443-642598.

13. Беляев А.Н., Афоничев Д.Н., Тришина Т.В. Оценка параметров клотоидной траектории входа в поворот колесной машины // *Наука в центральной России*. 2022. № 2(56). С. 30-37. DOI: 10.35887/2305-2538-2022-2-30-37.

14. Lin P., Javanmardi E., Tsukada M. Clothoid Curve-Based Emergency-Stopping Path Planning With Adaptive Potential Field for Autonomous Vehicles // *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. T.73. №7. С. 9747-9762. DOI: 0.1109/TVT.2024.3380745.

15. Shaju A, Southward S, Ahmadian M. Enhancing Autonomous Vehicle Navigation with a Clothoid-Based Lateral Controller // *Applied Sciences*. 2024. T.14. №5. С. 1817. DOI: 10.3390/app14051817.

16. Kim D.J., Chung C.C. Automated Perpendicular Parking System With Approximated Clothoid-Based Local Path Planning // *IEEE Control Systems Letters*. T. 5. №6. С. 1940-1945. DOI: 10.1109/LCSYS.2020.3044254

17. Tuttle T., Wilhelm J. Minimal length multi-segment clothoid return paths for vehicles with turn rate constraints // *Frontiers in Aerospace Engineering*. DOI: 10.3389/fpace.2022.982808.

18. Lima P.F., Trincavelli M., Mårtensson J., Wahlberg B. Clothoid-based model predictive control for autonomous driving // 2015 European Control Conference (ECC), Linz, Austria, 2015, pp. 2983-2990. DOI: 10.1109/ECC.2015.7330991.

19. Li J., Lou J., Li Y., Pan S., Xu Y. Trajectory Tracking of Autonomous Vehicle Using Clothoid Curve // *Applied Sciences*. 2023. T.13. С. 2733. DOI: 10.3390/app13042733.

20. Сухарев Р.Ю. Математические модели процессов поворота колесных дорожно-строительных машин // *Научно-*

11. Sukharev R.Y. Trajectory plotting algorithm for a self-driving road grader. *Journal of Physics: Conference Series*. Vladivostok, 2021. P. 012181. DOI: 10.1088/1742-6596/2096/1/012181.

12. Sukharev R.Yu., Letopolsky A.B., Sachuk A.Yu. A mathematical model of the movement of an unmanned tractor with front steerable wheels during the «rearrangement» maneuver. *Tractors and Agricultural Machinery*, 2024. DOI: 10.17816/0321-4443-642598.

13. Belyaev A.N., Afonichev D.N., Trishina T.V. Estimation of the parameters of the clothoid trajectory of the entrance to the turn of a wheeled vehicle. *Nauka v tsentralnoi Rossii*, 2022, No.2(56), pp. 30-37. DOI: 10.35887/2305-2538-2022-2-30-37 (In Russian)

14. Lin P., Javanmardi E., Tsukada M. Clothoid Curve-Based Emergency-Stopping Path Planning With Adaptive Potential Field for Autonomous Vehicles. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol. 73, No. 7, pp. 9747-9762. DOI: 0.1109/TVT.2024.3380745.

15. Shaju A, Southward S, Ahmadian M. Enhancing Autonomous Vehicle Navigation with a Clothoid-Based Lateral Controller. *Applied Sciences*, 2024, Vol.14, No.5, pp. 1817. DOI: 10.3390/app14051817.

16. Kim D.J., Chung C.C. Automated Perpendicular Parking System With Approximated Clothoid-Based Local Path Planning. *IEEE Control Systems Letters*, Vol.5, No.6, pp. 1940-1945. DOI: 10.1109/LCSYS.2020.3044254

17. Tuttle T., Wilhelm J. Minimal length multi-segment clothoid return paths for vehicles with turn rate constraints. *Frontiers in Aerospace Engineering*. DOI: 10.3389/fpace.2022.982808.

18. Lima P.F., Trincavelli M., Mårtensson J., Wahlberg B. Clothoid-based model predictive control for autonomous driving. *2015 European Control Conference (ECC)*, Linz, Austria, 2015, pp. 2983-2990. DOI: 10.1109/ECC.2015.7330991.

19. Li J., Lou J., Li Y., Pan S., Xu Y. Trajectory Tracking of Autonomous Vehicle Using Clothoid Curve. *Applied Sciences*, 2023, Vol.13, pp. 2733. DOI: 10.3390/app13042733

20. Sukharev R.Yu. Mathematical models of the processes of turning wheeled road-

технический вестник Брянского государственного университета. 2021. № 3. С. 259-269. DOI: 10.22281/2413-9920-2021-07-03-259-269.

21. Сухарев Р.Ю. Научные основы автономного управления колесными дорожно-строительными машинами: дисс. ... доктора техн. наук. Омск: СибАДИ, 2023. 320 с.

22. Luo D., Huang X., Huang Y., Miao M., Gao X. Optimal Trajectory Planning for Wheeled Robots (OTPWR): A Globally and Dynamically Optimal Trajectory Planning Method for Wheeled Mobile Robots // *Machines*. 2024. №12. С. 668. DOI: 10.3390/machines12100668.

23. Zhan J., Li W., Wang J., Xiong S., Wu X., Shi W. Research on Trajectory Planning and Tracking Algorithm of Crawler Paver // *Machines*. 2024. №12. С. 650. DOI: 10.3390/machines12090650.

24. Li Y., Li G., Wang X. Research on Trajectory Planning of Autonomous Vehicles in Constrained Spaces // *Sensors*. 2024. №24. С. 5746. DOI: 10.3390/s24175746.

25. Шевченко В.А., Чаплыгина А.М. Аналитическая модель движения автогрейдера во время выполнения рабочих операций // *Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета*. 2016. № 73. С. 167-175.

building machines. *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2021, No. 3, pp. 259-269. DOI: 10.22281/2413-9920-2021-07-03-259-269. (In Russian)

21. Sukharev, R. Y. Scientific foundations of autonomous control of wheeled road-building machines: Diss. for the degree of Doctor of Technical Sciences. Omsk, 2023. 320 p. (In Russian)

22. Luo D., Huang X., Huang Y., Miao M., Gao X. Optimal Trajectory Planning for Wheeled Robots (OTPWR): A Globally and Dynamically Optimal Trajectory Planning Method for Wheeled Mobile Robots. *Machines*, 2024, No.12, pp.668. DOI: 10.3390/machines12100668.

23. Zhan J., Li W., Wang J., Xiong S., Wu X., Shi W. Research on Trajectory Planning and Tracking Algorithm of Crawler Paver. *Machines*, 2024, No.12, pp. 650. DOI: 10.3390/machines12090650.

24. Li Y., Li G., Wang X. Research on Trajectory Planning of Autonomous Vehicles in Constrained Spaces. *Sensors*, 2024, Vol.24, pp. 5746. DOI:https: 10.3390/s24175746.

25. Shevchenko V.A., Chaplygina A.M. Analytical model of motor grader movement during work operations. *Vestnik Kharkovskogo Natsionalnogo Avtomobilno-dorognogo Universiteta*, 2016, No. 73. pp. 167-175. (In Russian)