

УДК (UDC) 629.113

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ РУЛЕВОГО  
УПРАВЛЕНИЯ ГРУЗОВОГО АВТОМОБИЛЯ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ  
ПАРКОВОЧНЫХ МАНЕВРОВMODELING THE FUNCTIONING PROCESS OF THE STEERING SYSTEM OF A  
TRUCK DURING PARKING MANEUVERSГорбатенко Н.Н.  
Gorbatenko N.N.Белорусско-Российский университет (Могилев, Республика Беларусь)  
Belarusian-Russian University (Mogilev, Republic of Belarus)

**Аннотация.** В статье рассматривается разработка математической модели системы рулевого управления грузового автомобиля, оснащенного винтореечным рулевым механизмом с гидроусилителем. Особое внимание уделено моделированию работы системы при выполнении парковочных маневров, которые характеризуются большими углами поворота колес, изменяющимся передаточным отношением рулевой трапеции и нелинейным сопротивлением повороту колес. Модель включает в себя описание основных компонентов рулевой системы: насоса, напорного трубопровода, роторного распределителя, гидроцилиндра, рулевой трапеции, шин и управляемых колес. Приведены основные допущения и уравнения, используемые при моделировании механической и гидравлической подсистем. Рассмотрены особенности работы роторного распределителя и изменения характеристик проходных сечений дроссельных окон в зависимости от угла закручивания торсионного вала. Анализируется динамика гидроцилиндра и рулевой трапеции, а также моменты сопротивления повороту шин. Проведен кинематический анализ рулевой трапеции, получены зависимости для расчета передаточного отношения и угловых скоростей ее элементов. Для описания момента сопротивления повороту колес использована модель, учитывающая явление гистерезиса. Численное решение уравнений модели в среде Matlab/Simulink при синусоидальном воздействии на рулевое колесо подтвердило соответствие отклика модели ожидаемым характеристикам рулевого управления.

**Ключевые слова:** грузовой автомобиль, система рулевого управления, гидравлический усилитель, винтореечный рулевой механизм, роторный распределитель.

**Дата получения статьи:** 13.12.2024  
**Дата принятия к публикации:** 24.02.2025  
**Дата публикации:** 25.03.2025

**Сведения об авторе:**

Горбатенко Николай Николаевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры



**Abstract.** The article discusses the development of a mathematical model for the steering system of a truck equipped with a screw-and-rack steering mechanism with power assistance. Special attention is given to modeling the system's operation during parking maneuvers, characterized by large wheel turning angles, variable steering linkage ratios, and nonlinear resistance to wheel turning. The model includes descriptions of the main components of the steering system: the pump, pressure pipeline, rotary valve, hydraulic cylinder, steering linkage, tires, and steered wheels. Key assumptions and equations used for modeling the mechanical and hydraulic subsystems are presented. The features of the rotary valve's operation and the variation in the characteristics of throttle openings depending on the torsion bar twist angle are examined. The dynamics of the hydraulic cylinder and steering linkage, as well as the resistance moments for wheel turning, are analyzed. A kinematic analysis of the steering linkage is performed, and equations for calculating the linkage ratio and the angular velocities of its elements are derived. To describe the wheel turning resistance moment, a model considering hysteresis phenomena is employed. Numerical solutions of the model equations in the Matlab/Simulink environment, under sinusoidal input to the steering wheel, confirmed that the model's response corresponds to the expected characteristics of the steering system.

**Keywords:** truck, steering system, hydraulic booster, rack and pinion steering mechanism, rotary distributor.

**Date of manuscript reception:** 13.12.2024  
**Date of acceptance for publication:** 24.02.2025  
**Date of publication:** 25.03.2025

**Author's information:**

Nikolay N. Gorbatenko – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of

«Программное обеспечение информационных технологий», Белорусско-Российский университет, e-mail: [harbatsenka.m@yandex.ru](mailto:harbatsenka.m@yandex.ru).

† the Department «Software for Information Technologies» at Belarusian-Russian University, e-mail: [harbatsenka.m@yandex.ru](mailto:harbatsenka.m@yandex.ru).

## 1. Введение

Моделирование является важным инструментом в разработке систем рулевого управления грузовых автомобилей с гидравлическим усилителем. Оно позволяет на ранних этапах проектирования оценить функциональные и эксплуатационные характеристики системы, снизить затраты на проведение испытаний и ускорить процесс создания системы.

Большинство существующих моделей сосредоточено на анализе времени отклика гидросилителя, его устойчивости и точности воспроизведения управляющих воздействий при выполнении экстремальных маневров водителем, таких как «поворот», «переставка» и «рывок руля» [1 – 6]. Эти сценарии управления характеризуются высокой скоростью движения автомобиля, небольшими углами поворота управляемых колес и относительно небольшими изменениями сопротивления повороту колес. В подобных исследованиях, как правило, предполагается постоянство передаточного отношения рулевой трапеции. Однако в условиях парковки автомобиля, выполняемой при низкой или нулевой скорости, углы поворота управляемых колес варьируются в широком диапазоне – от упора до упора. Это вызывает значительные изменения передаточного отношения рулевой трапеции. Кроме того, сопротивление повороту колес достигает максимальных значений, а его зависимость от угла поворота становится существенно нелинейной. Анализ литературных источников показывает, что функционирование рулевого управления в режиме парковки с учетом этих особенностей до сих пор изучено недостаточно.

Цель данной работы заключается в разработке математической модели системы рулевого управления грузового автомобиля, оснащенной винтореечным рулевым механизмом и гидросилителем интегрального типа

с роторным распределителем. Модель предназначена для анализа динамики рабочих процессов системы в условиях выполнения водителем парковочных маневров.

## 2. Математическая модель

Математическая модель системы рулевого управления включает в себя описание насоса с предохранительным клапаном, напорного трубопровода, роторного распределителя, гидроцилиндра, рулевой трапеции, шин и управляемых колес.

При моделировании механической подсистемы рулевого управления (рис. 1) были приняты следующие упрощения:

- масса рулевых тяг не учитывалась, так как она мала по сравнению с массами колес;
- предполагалось отсутствие зазоров в шарнирах привода и в зацеплениях рулевого механизма;

- потери на трение в шарнирах привода и шкворнях управляемого моста не учитывались.

При моделировании гидравлической системы приняты следующие допущения:

- жидкость считается сжимаемой;
- гидролинии, соединяющие распределитель с гидроцилиндром, короткие, поэтому потерями давления и их динамикой пренебрегаем;
- коэффициент расхода жидкости через золотник считается постоянным;
- гидродинамические силы, действующие на золотник, пренебрежимо малы;
- внешние и внутренние утечки жидкости из рабочих полостей гидроцилиндра отсутствуют;
- кинематическая вязкость, плотность рабочей жидкости и содержание нерастворенного воздуха предполагаются неизменными;
- динамические процессы в сливном трубопроводе не учитываются, так как их влияние на систему незначительно.

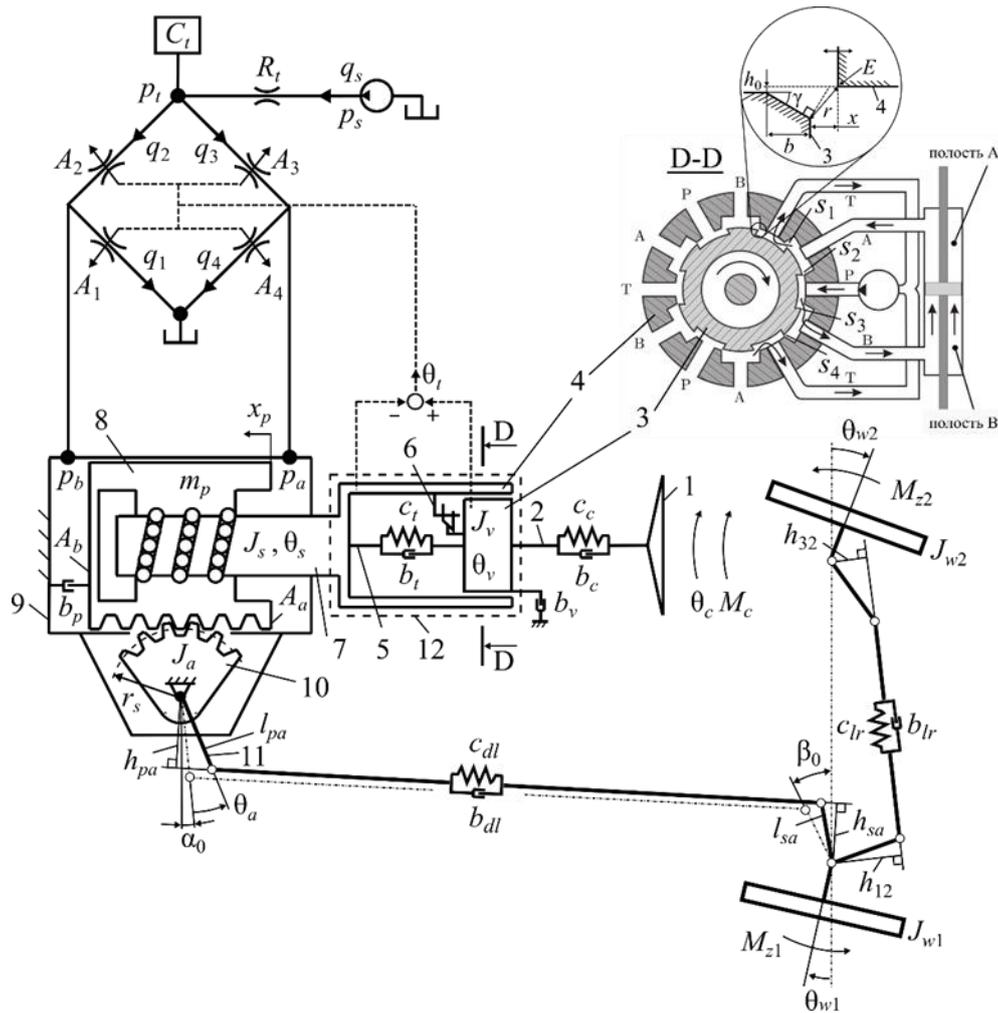


Рис. 1. Динамическая модель рулевого управления: 1 – рулевое колесо; 2 – вал рулевой колонки; 3 – роторный золотник; 4 – гильза; 5 – торсионный вал; 6 – ограничитель поворота золотника; 7 – рулевой винт; 8 – поршень гидроцилиндра с рейкой и шариковой гайкой; 9 – гидроцилиндр; 10 – зубчатый сектор вала сошки; 11 – рулевая сошка; 12 – роторный распределитель

Для вывода уравнений движения механических элементов рулевого управления использовался принцип Даламбера. Математическая модель гидросистемы основана на уравнениях, описывающих расход жидкости через дроссельные устройства, уравнениях неразрывности течения жидкости и уравнениях потерь давления.

**Модель насоса.** Стандартная конфигурация гидроусилителя рулевого управления включает насос с постоянным рабочим объемом, оснащенный регулятором расхода и предохранительным клапаном. Статическая характеристика такого насоса

(зависимость подачи насоса  $q_s$  от давления  $p_s$  на выходе) представляет собой ломаную линию и описывается системой уравнений:

$$q_s = \begin{cases} q_{st} - k_p p_s, & 0 \leq p_s \leq p_{s1}; \\ \frac{p_{s2} - p_s}{p_{s2} - p_{s1}} q_{s1}, & p_{s1} < p_s \leq p_{s2}, \end{cases}$$

где  $q_{st}$  – теоретическая подача насоса;  $k_p$  – коэффициент наклона регуляторной ветви характеристики насоса;  $p_{s1}$  – давление срабатывания предохранительного клапана;  $p_{s2}$  – давление на выходе насоса, когда вся подача насоса через открытый предохра-

нительный клапан перепускается в бак;  $q_{s1}$  – подача насоса в момент открытия предохранительного клапана.

Первое уравнение системы описывает изменение подачи насоса при закрытом предохранительном клапане, а второе уравнение – при открытом предохранительном клапане.

**Модель напорного трубопровода насоса.** Типичный напорный трубопровод состоит из двух стальных гидролиний, соединенных рукавом высокого давления. Ввиду небольшой длины напорного трубопровода волновыми процессами в нем можно пренебречь и применить метод сосредоточенных параметров для его моделирования [7]. Согласно этому методу, трубопровод представлен двумя дискретными элементами (рис. 1): гидравлическим сопротивлением  $R_t$ , обозначающим потери давления из-за трения жидкости и в местных сопротивлениях, и гидравлической емкостью  $C_t$ , характеризующей сжимаемость жидкости и упругость материала стенок трубопровода. Динамические процессы в трубопроводе описываются системой дифференциально-алгебраических уравнений, включающей уравнение сжимаемости жидкости в емкости (1) и уравнение баланса давлений в трубопроводе (2):

$$q_s - q_2 - q_3 = C_t \dot{p}_t; \quad (1)$$

$$p_s - p_t = R_t |q_s| q_s, \quad (2)$$

где  $p_t$  – давление жидкости в емкости.

Гидравлическая емкость трубопровода  $C_t = V_t / E_t$ ,  $V_t$  – объем трубопровода;  $E_t$  – эффективный модуль объемной упругости жидкости с учетом упругости стенок трубопровода [7].

$$E_t = \left( \frac{1}{E_f} + \sum_{j=1}^3 \frac{V_{tj}}{V_t} \frac{d_j}{t_{wj} E_{wj}} \right)^{-1},$$

где  $E_f$  – модуль объемной упругости газожидкостной смеси;  $V_{tj}$  – объем  $j$ -го участка трубопровода;  $d_j$ ,  $t_{wj}$ ,  $E_{wj}$  – внутренний диаметр, толщина стенки, модуль объемной уп-

ругости материала стенки  $j$ -го участка трубопровода соответственно.

$$E_f = E_0 \left[ \left( \frac{p_t}{p_0} \right)^n + r_a \right] \left[ \left( \frac{p_t}{p_0} \right)^n + \frac{r_a E_0}{n p_t} \right]^{-1},$$

где  $E_0$  – модуль объемной упругости жидкости;  $p_0$  – атмосферное давление;  $n$  – показатель политропы;  $r_a$  – процент нерастворенного воздуха в жидкости.

Гидравлическое сопротивление трубопровода:

$$R_t = \frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{A_j^2} \left( \lambda_j \frac{l_j}{d_j} + \zeta_j \right),$$

где  $\rho$  – плотность рабочей жидкости;  $A_j$ ,  $\lambda_j$ ,  $l_j$ ,  $\zeta_j$  – коэффициент потерь на трение, длина, коэффициент местных сопротивлений  $j$ -го участка трубопровода.

Коэффициент потерь на трение рассчитывался по формуле:

$$\lambda_j = \begin{cases} 64 / \text{Re}_j, & \text{если } \text{Re}_j \leq 2000; \\ 0,0242 + 3,9 \cdot 10^{-6} \text{Re}_j, & \text{если } 2000 < \text{Re}_j < 4000; \\ 0,3164 / \text{Re}_j^{0,25}, & \text{если } \text{Re}_j \geq 4000. \end{cases}$$

Здесь  $\text{Re}_j$  – число Рейнольдса, определяющее режим течения жидкости в  $j$ -м участке трубопровода ( $\text{Re}_j \leq 2000$  соответствует ламинарному режиму,  $\text{Re}_j \geq 4000$  – турбулентному режиму, а  $2000 < \text{Re}_j < 4000$  – течению потока жидкости в переходной зоне [8]).

**Модель роторного распределителя.** Роторный распределитель управляет потоком рабочей жидкости от насоса к гидроцилиндру в зависимости от угла закручивания торсионного вала  $\theta_t$ . Максимальный угол поворота золотника относительно гильзы ограничен упором 6 (см. рис. 1). Золотник и гильза имеют продольные пазы, которые образуют 12 дроссельных окон. Четыре последовательно расположенных окна с площадями проходных сечений  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ ,  $s_4$  образуют дросселирующий распределитель с открытым центром. Три таких распределителя ра-

ботают параллельно и расположены по окружности. Их внешние линии соединены с рабочими полостями гидроцилиндра, напорным трубопроводом насоса и гидробаком. При вращении рулевого колеса площади проходных сечений дроссельных окон изменяются в зависимости от угла закручивания торсиона:  $s_i = f(\theta_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

Эквивалентная схема роторного распределителя представлена на рис. 1 в виде гидравлического моста с четырьмя регулируемыми дросселями. Площадь  $i$ -го регулируемого дросселя  $A_i(\theta_i) = 3s_i(\theta_i)$ . Расходы жидкости в плечах моста:

$$q_i = C_d A_i(\theta_i) \sqrt{2|\Delta p_i|/\rho} \operatorname{sgn}(\Delta p_i),$$

где  $C_d$  – коэффициент расхода рабочей жидкости;  $\Delta p_i$  – разность давлений на дросселе.

Уравнение вращательного движения золотника распределителя:

$$\begin{aligned} J_v \ddot{\theta}_v + b_v \dot{\theta}_v &= M_{sw} - M_t; \\ M_{sw} &= c_c(\theta_c - \theta_v) + b_c(\dot{\theta}_c - \dot{\theta}_v); \\ M_{tu} &= c_t(\theta_v - x_p u_{sp}) + b_t(\dot{\theta}_v - \dot{x}_p u_{sp}); \\ M_t &= \min(|M_{tu}|, M_{t\max}) \operatorname{sgn}(M_{tu}), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $M_{sw}$  – крутящий момент на рулевом колесе;  $\theta_c$  – угол поворота рулевого колеса;  $c_c$  – коэффициент жесткости рулевого вала;  $b_c$  – коэффициент демпфирования рулевого вала;  $M_t$  – крутящий момент торсионного вала распределителя;  $c_t$  – коэффициент жесткости торсиона;  $b_t$  – коэффициент демпфирования в торсионе;  $b_v$  – коэффициент демпфирования золотника;  $u_{sp}$  – передаточное отношение передачи винт-шариковая гайка. Уравнение (3) ограничивает крутящий момент торсиона значением  $M_{t\max} = c_t \theta_{t\max}$ , где  $\theta_{t\max}$  – максимальный угол закручивания торсионного вала.

Чтобы рулевое управление обладало необходимой чувствительностью, характеристики изменения площадей дроссельных окон в зависимости от угла закручивания

торсиона делают нелинейными [9–11]. Это достигается благодаря специальным дозирующим кромкам на зубьях золотника. Они могут иметь разную форму, например, прямоугольную или треугольную. При моделировании предполагалось, что функцию дозирующих кромок выполняют фаски на зубьях золотника. Площадь проходного сечения дроссельного окна с такой кромкой, рассчитывалась как произведение длины фаски  $l_e$  на кратчайшее расстояние  $r$  между точкой  $E$  и фаской (рис. 1) по формуле:

$$s(\theta_i) = \begin{cases} l_e \sqrt{x^2 + (h_0 + b \tan \gamma)^2}, & \text{если } x \geq (h_0 + b \tan \gamma) \tan \gamma; \\ l_e ((x + b) \tan \gamma + h_0) \cos \gamma, & \text{если } x \geq (h_0 \tan \gamma - b) \text{ и} \\ x < (h_0 + b \tan \gamma) \tan \gamma; \\ l_e \sqrt{h_0^2 + (x + b)^2}, & \text{если } -b \leq x < (h_0 \tan \gamma - b); \\ l_e h_0, & \text{если } x < -b, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\gamma$  – угол скоса фаски;  $b$  – ширина фаски:  $b = r_v \theta_{t\max} - x_0$ ;  $h_0$  – радиальный зазор пары золотник-гильза;  $x$  – перемещение гильзы относительно золотника.

Для открывающихся дроссельных окон  $s_{1,3} - x = x_0 + r_v \theta_t$ . Для закрывающихся окон  $s_{2,4} - x = x_0 - r_v \theta_t$ . Здесь  $r_v$  это радиус золотника, а  $x_0$  перекрытие золотника с гильзой:  $x_0 = (b_g - b_t)/2$ ,  $b_g$  – ширина паза в гильзе,  $b_t$  – ширина зуба золотника.

В распределителе помимо дроссельных окон, имеются радиальные отверстия в гильзе (рис. 1, сечение D-D), которые ограничивают площадь открытия окон при сильном закручивании торсиона.

На рис. 2 представлены графики изменения площадей дроссельных окон, полученные по формуле (4) при следующих параметрах распределителя:  $r_v = 12,5 \cdot 10^{-3}$  м;  $\theta_{t\max} = 6^\circ$ ;  $h_0 = 10 \cdot 10^{-6}$  м;  $l_e = 11,2 \cdot 10^{-3}$  м;  $\gamma = 10^\circ$ ;  $b_g = 6,0 \cdot 10^{-3}$  м;  $b_t = 5,5 \cdot 10^{-3}$  м.

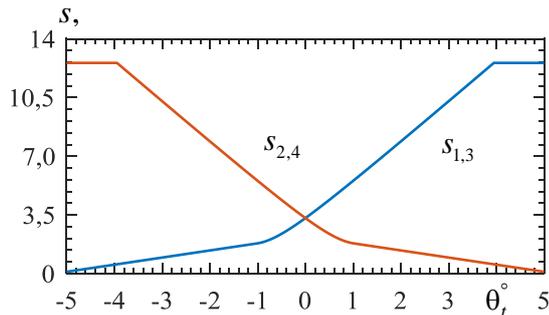


Рис. 2. Зависимость площадей проходных сечений дроссельных окон распределителя от угла закручивания торсионного вала

Можно отметить, что площадь закрывающихся окон при малых углах закручивания торсиона больше, чем при больших углах закручивания. В результате перепад давлений в рабочих полостях гидроцилиндра усилителя, и, следовательно, крутящий момент на валу сошки, будет увеличиваться медленнее при небольших поворотах рулевого колеса и быстрее – при значительных поворотах. Такая особенность уменьшает чувствительность автомобиля к повороту руля при движении по прямой на высокой скорости и облегчает маневрирование во время парковки или выполнении крутых поворотов.

**Модель гидроцилиндра.** Модель гидроцилиндра включает в себя уравнение движения поршня и уравнения изменения давлений в рабочих полостях цилиндра. Дифференциальное уравнение движения поршня имеет вид:

$$\left(m_p + J_s u_{sp}^2 + \frac{J_a}{r_s^2}\right) \ddot{x}_p = p_a A_a + M_t u_{sp} \eta_{sp} - p_b A_b - \frac{F_{dl} h_{pa}}{r_s \eta_{rs}} - F_f;$$

$$h_{pa} \approx l_{pa} \cos\left(\alpha_0 + \frac{x_p}{r_s}\right),$$

где  $r_s$  – радиус делительной окружности зубчатого сектора вала сошки;  $p_{a,b}$  – давление в рабочей полости гидроцилиндра;  $A_{a,b}$  – площадь поршня;  $M_t$  – крутящий момент торсионного вала;  $\eta_{sp}$  – КПД передачи винт-шариковая гайка;  $\eta_{rs}$  – КПД передачи рейка-

сектор;  $F_f$  – сила трения поршня;  $F_{dl}$  – усилие в продольной рулевой тяге;  $h_{pa}$  – плечо силы  $F_{dl}$  относительно оси вращения вала сошки;  $\alpha_0$  – угол наклона рулевой сошки относительно вертикальной линии, проходящей через ось вращения вала сошки в нейтральной положении управляемых колес;  $l_{pa}$  – длина рулевой сошки.

Сила трения поршня в зоне контакта с цилиндром представлена как функция скорости с учетом трения Штрибека, кулоновского и вязкого трения [12]:

$$F_f = \left( F_c + (F_s - F_c) e^{-\left(\frac{v_p}{v_s}\right)^2} \right) \tanh\left(\frac{2v_p}{\delta}\right) + b_p v_p,$$

где  $v_p$  – скорость поршня;  $F_c$  – сила трения Кулона, обусловленная действием нормальных сил упругости в уплотнительных устройствах гидроцилиндра;  $F_s$  – статическая сила трения;  $v_s$  – скорость Штрибека;  $b_p$  – коэффициент демпфирования поршня.

Функция гиперболического тангенса  $\tanh(2v_p/\delta)$  обеспечивает плавный переход силы трения через ноль и гарантирует устойчивость численного решения. Параметр  $\delta$  определяет скорость перехода гиперболического тангенса через точку  $v_p = 0$ .

Изменение давлений в рабочих полостях гидроцилиндра определяются уравнениями сжимаемости жидкости:

$$\dot{p}_a = \frac{E_h}{V_{a0} + A_a x_p} (q_3 - q_4 - A_a \dot{x}_p);$$

$$\dot{p}_b = \frac{E_h}{V_{b0} - A_b x_p} (A_b \dot{x}_p + q_2 - q_1),$$

где  $E_h$  – эффективный модуль объемной упругости жидкости с учетом податливости материала стенок гидроцилиндра;  $V_{a0}$ ,  $V_{b0}$  – объемы жидкости в рабочих полостях гидроцилиндра в среднем положении поршня.

**Кинематические характеристики рулевой трапеции.** Рулевая трапеция грузового автомобиля с зависимой подвеской представляет собой четырехзвенный шарнирный

механизм (рис. 3). В нейтральном положении управляемых колес боковые рычаги трапеции  $l_1$  и  $l_3$  наклонены под углом  $\lambda_0$  к оси балки переднего моста.

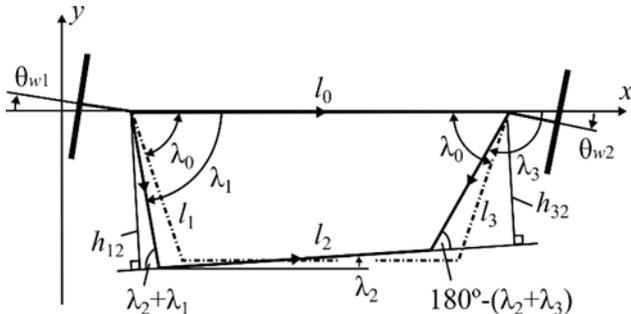


Рис. 3. Схема рулевой трапеции

Для определения передаточного отношения рулевой трапеции выполним кинематический анализ. Уравнение замкнутости векторного контура трапеции имеет вид:

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_0 + \vec{l}_3.$$

Проецируем это уравнение на оси  $x$  и  $y$ :

$$l_2 \cos \lambda_2 = l_0 + l_3 \cos \lambda_3 - l_1 \cos \lambda_1; \quad (5)$$

$$l_2 \sin \lambda_2 = -l_3 \sin \lambda_3 + l_1 \sin \lambda_1. \quad (6)$$

Возведя в квадрат уравнения (5), (6) и сложив их получим:

$$K_1 \sin \lambda_3 + K_2 \cos \lambda_3 + K_3 = 0. \quad (7)$$

Здесь коэффициенты  $K_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) являются функциями от угла поворота  $\lambda_1$ :

$$K_1 = -2l_1 l_3 \sin \lambda_1;$$

$$K_2 = 2l_3 (l_0 - l_1 \cos \lambda_1);$$

$$K_3 = l_0^2 + l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 - 2l_1 l_0 \cos \lambda_1.$$

Уравнение (7) известно, как уравнение Фрейденштейна [13]. Используя универсальную тригонометрическую подстановку:

$$x = \tan \frac{\lambda_3}{2}, \quad \sin \lambda_3 = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \cos \lambda_3 = \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

уравнение (7) можно привести к квадратному уравнению относительно переменной  $x$ :

$$(K_3 - K_2)x^2 + 2K_1x + (K_2 + K_3) = 0.$$

Решение этого уравнения дает следующее выражение для вычисления  $\lambda_3$  в зависимости от  $\lambda_1$ :

$$\lambda_3 = 2 \arctg \frac{-K_1 \pm \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_3 - K_2}.$$

Разделив (6) на (5) можно получить выражение для вычисления угла поворота  $\lambda_2$  поперечной тяги рулевой трапеции:

$$\lambda_2 = \arctg \frac{l_1 \sin \lambda_1 - l_3 \sin \lambda_3}{l_0 + l_3 \cos \lambda_3 - l_1 \cos \lambda_1}.$$

Чтобы найти угловую скорость бокового рычага  $l_3$  уравнения (5) и (6) были продифференцированы по времени и решены относительно неизвестной  $\dot{\lambda}_3$ . В результате получено выражение для вычисления угловой скорости:

$$\dot{\lambda}_3 = \frac{l_1 \sin(\lambda_2 + \lambda_1)}{l_3 \sin(\lambda_2 + \lambda_3)} \dot{\lambda}_1.$$

Углы поворота левого  $\theta_{w1}$  и правого  $\theta_{w2}$  управляемого колеса связаны с углами поворота звеньев боковых рычагов трапеции выражениями:

$$\theta_{w1} = \lambda_1 - \lambda_0, \dots, \theta_{w2} = \lambda_3 + \lambda_0 - 180^\circ.$$

Передаточное отношение рулевой трапеции:

$$u_{st} = \frac{\dot{\theta}_{w1}}{\dot{\theta}_{w2}} = \frac{\dot{\lambda}_1}{\dot{\lambda}_3} = \frac{l_3 \sin(\lambda_2 + \lambda_3)}{l_1 \sin(\lambda_2 + \lambda_1)} = \frac{h_{32}}{h_{12}}, \quad (8)$$

где  $h_{12}$ ,  $h_{32}$  – длины перпендикуляров, опущенных от оси поворота колес на ось поперечной тяги  $l_2$  трапеции.

График на рис. 4 построен по формуле (8) при следующих параметрах рулевой трапеции:  $l_0 = 1,893$  м;  $l_1 = l_3 = 0,289$  м;  $l_2 = 1,724$  м;  $\lambda_0 = 73^\circ$ . Можно заметить, что передаточное отношение изменяется в 2,7 раза при по-

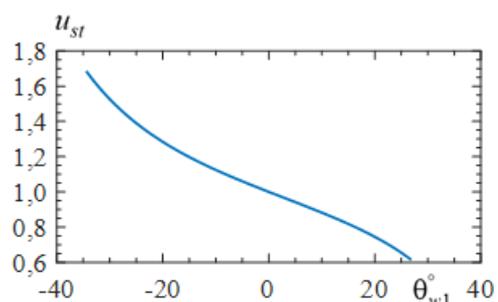


Рис. 4. Зависимость передаточного отношения рулевой трапеции от угла поворота левого управляемого колеса

вороте управляемых колес от одного упора к другому; при повороте вправо оно уменьшается, а влево возрастает. В нейтральном положении управляемых колес передаточное отношение равно единице.

**Модель шины.** Чтобы повернуть колеса стоящего автомобиля водителю необходимо преодолеть сопротивление со стороны дороги. Ключевую роль в величине этого сопротивления играет момент, вызванный скольжением шин по дорожному покрытию. Другие факторы, такие как сопротивление качению колес вокруг шкворней и сопротивление подъему передней оси автомобиля из-за углов установки шкворней, вносят незначительный вклад в общее сопротивление повороту колес и ими можно пренебречь [14].

Для описания поведения шины использована модель, предложенная в работе [15]. Она отражает зависимость между углом поворота колеса и моментом сопротивления повороту, учитывая при этом явление гистерезиса. Модель включает уравнения:

$$M_z = c_w \Delta_w; \quad \Delta_w = \int_0^t \dot{\Delta}_w dt; \quad (9)$$

$$\dot{\Delta}_w = \begin{cases} \dot{\theta}_w, & \text{если } \text{sgn}(\Delta_w) \neq \text{sgn}(\dot{\theta}_w); \\ \left( 1 - \left| \frac{M_z}{M_{\phi \max}} \right|^2 \right) \dot{\theta}_w, & \text{если } \text{sgn}(\Delta_w) = \text{sgn}(\dot{\theta}_w); \end{cases}$$

$$M_{\phi \max} = \frac{2\varphi}{3} \frac{G_w^{1,5}}{\sqrt{\pi p_w}},$$

где  $M_z$  – момент сопротивления повороту колеса;  $c_w$  – коэффициент крутильной жесткости шины;  $\Delta_w$  – деформация шины колеса;  $\dot{\theta}_w$  – скорость поворота колеса;  $M_{\phi \max}$  – максимальный момент сопротивления скольжению шины по дорожному покрытию [14];  $\varphi$  – коэффициент сцепления шины с дорогой;  $G_w$  – вертикальная статическая нагрузка на колесо;  $p_w$  – давление воздуха в шине.

Коэффициент крутильной жесткости шины

$$c_w = M_{\phi \max} / \theta_{ws},$$

где  $\theta_{ws}$  – угол поворота колеса, соответствующий началу скольжения шины.

На рис. 5 показан график, построенный по уравнению (9) при  $\varphi = 0,7$ ;  $G_w = 25000$  Н,  $p_w = 7,3 \cdot 10^5$  Па;  $\theta_{ws} = 4$  град.;  $\dot{\theta}_w = 1,5$  град/с. На графике видна петля гистерезиса момента сопротивления при циклическом изменении угла поворота колеса.

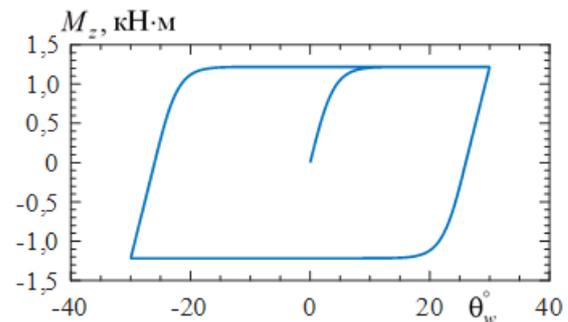


Рис. 5. Зависимость момента сопротивления от угла поворота колеса

#### Модель поворота колес автомобиля.

Управляемые колеса совершают вращательное движение вокруг осей шкворней под действием приложенных сил. Дифференциальные уравнения вращательного движения колес имеют вид:

$$J_{w1} \ddot{\theta}_{w1} + b_w \dot{\theta}_{w1} = F_{dl} h_{sa} - F_{lr} h_{12} - M_{z1};$$

$$J_{w2} \ddot{\theta}_{w2} + b_w \dot{\theta}_{w2} = F_{lr} h_{32} - M_{z2};$$

$$F_{dl} = c_{dl} \left( h_{pa} \frac{x_p}{r_s} - h_{sa} \theta_{w1} \right) + b_{dl} \left( h_{pa} \frac{\dot{x}_p}{r_s} - h_{sa} \dot{\theta}_{w1} \right);$$

$$F_{lr} = c_{lr} (h_{12} \theta_{w1} - h_{32} \theta_{w2}) + b_{lr} (h_{12} \dot{\theta}_{w1} - h_{32} \dot{\theta}_{w2});$$

$$h_{sa} \approx l_{sa} \cos(\beta_0 - \theta_{w1}),$$

где  $h_{sa}$  – плечо силы  $F_{dl}$  относительно оси шкворня левого колеса;  $F_{lr}$  – усилие в поперечной тяге рулевого привода;  $l_{sa}$  – длина рычага поворотной цапфы;  $c_{dl}$  – жесткость продольной тяги рулевого привода;  $b_{dl}$  – коэффициент демпфирования в продольной тяге;  $c_{lr}$  – жесткость поперечной тяги рулевого привода;  $b_{lr}$  – коэффициент демпфирования в поперечной тяге;  $b_w$  – коэффициент демп-

фирования в шине;  $\beta_0$  – угол наклона рычага поворотной цапфы к оси балки переднего моста в нейтральном положении колес.

### 3. Результаты моделирования

Для проверки работоспособности модели, был проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого управляемые колёса стоящего автомобиля поворачивались под воздействием синусоидального сигнала амплитудой  $360^\circ$  и частотой 0,25 Гц, прикладываемого к рулевому колесу. Такой режим работы рулевого управления характерен для парковочных маневров автомобиля. Решение дифференциальных уравнений модели выполнено в среде Matlab/Simulink. При моделировании использовались параметры, близкие к характеристикам грузовых автомобилей с вертикальной нагрузкой на управляемый мост в диапазоне 40–50 кН.

Значения параметров механической подсистемы рулевого управления:  $J_{rv} = 0,0015$  кг·м<sup>2</sup>;  $J_s = 0,0055$  кг·м<sup>2</sup>;  $J_a = 0,042$  кг·м<sup>2</sup>;  $J_{w1,2} = 1,684$  кг·м<sup>2</sup>;  $m_p = 3,76$  кг;  $c_c = 42079$  Н·м/рад;  $b_c = 0,0653$  Н·м·с/рад;  $c_t = 143,2$  Н·м/рад;  $b_t = 0,0164$  Н·м·с/рад;  $b_v = 0,0184$  Н·м·с/рад;  $p_s = 0,018$  м;  $r_s = 0,0675$  м;  $b_p = 2296,504$  Н·с/м;  $F_c = 18$  Н.

Значения параметров гидравлической подсистемы рулевого управления:  $A_a = 6,7878 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>;  $A_b = 7,8539 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>;  $E_0 = 1,4 \cdot 10^9$  Па;  $E_{h1,3} = 7 \cdot 10^{10}$  Па;  $E_{h2} = 0,5 \cdot 10^9$  Па;  $\rho = 860$  кг/м<sup>3</sup>;  $C_d = 0,63$ ;  $l_{h1} = 0,58$  м;  $d_{h1} = 0,010$  м;  $l_{h2} = 0,3$  м;  $d_{h2} = 0,010$  м;  $l_{h3} = 0,12$  м;  $d_{h3} = 0,010$  м;  $t_{h1,3} = 0,0015$  м;  $t_{h2} = 0,004$  м;  $q_{st} = 1,6667 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с;  $k_p = 1,6667 \cdot 10^{-12}$  м<sup>5</sup>/с·Па;  $p_{s1} = 10$  МПа;  $p_{s2} = 10,5$  МПа;  $q_{s1} = 1,5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с;  $V_{a0} = 2,715 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>;  $V_{b0} = 3,142 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>;  $r_a = 0,5\%$ ;  $n = 1,4$ ;  $p_0 = 10^5$  Па.

Результаты моделирования представлены на рис. 6. В начальный момент времени рулевое колесо находится в нейтральном положении и жидкость от насоса подается

через дросселирующий распределитель в рабочие полости гидроцилиндра. Из-за разницы в площадях ( $A_b > A_a$ ), поршень движется вправо до тех пор, пока не установится равновесие сил давления жидкости, действующих на него. В этом состоянии торсионный вал закручен на угол  $\theta_t = 0,02944^\circ$ , проходные сечения дросселей распределителя составляют  $A_{1,3} = 1,0124 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup> и  $A_{2,4} = 9,75993 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>, разность давлений в рабочих полостях цилиндра  $\Delta p = p_a - p_b = 5569,68$  Па, давление на входе распределителя  $p_t = 1,5184 \cdot 10^5$  Па, управляемые колеса находятся в нейтральном положении.

В течение интервала времени  $1 < t \leq 5$  с рулевое колесо поворачивается вправо на  $360^\circ$ . При этом из-за возникшего сопротивления повороту управляемых колес, торсион распределителя начинает закручиваться. По мере закручивания торсиона дроссели  $A_{1,3}$  распределителя открываются (их площади увеличиваются), в то время как дроссели  $A_{2,4}$  закрываются (их площади уменьшаются). Через дроссель  $A_3$  рабочая жидкость с расходом  $q_3$  поступает в штоковую полость гидроцилиндра, а через дроссель  $A_1$  вытекает из поршневой полости с расходом  $q_1$ . В результате на поршне возникает разность давлений  $\Delta p$ , определяемая деформацией торсиона, что приводит к перемещению поршня и повороту управляемых колес вправо. Можно заметить, что перемещение поршня  $x_p$  и углы поворота управляемых колес  $\theta_{w1,2}$  изменяются пропорционально углу поворота рулевого колеса  $\theta_c$ , что свидетельствует о правильности отражения моделью кинематического следящего действия усилителя. График разности давлений на поршне  $\Delta p$  имеет форму близкую к синусоидальному командному сигналу. Давление насоса  $p_s$  определяется величиной момента сопротивления повороту колес  $M_{r1,2}$ .

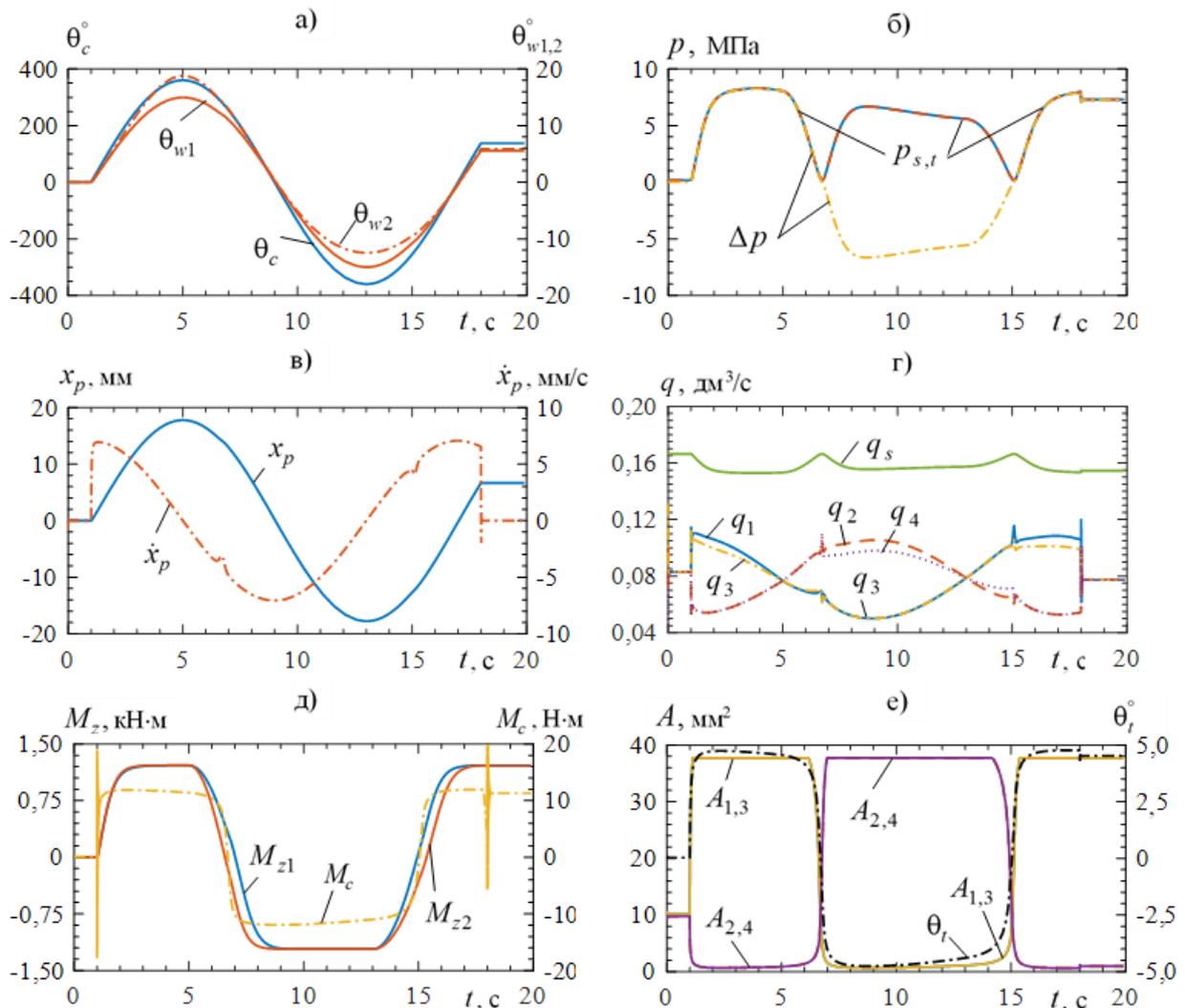


Рис. 6. Графики изменения фазовых переменных модели во времени: а) – углы поворота рулевого колеса и управляемых колес; б) – давления в гидросистеме; в) – перемещение и скорость поршня гидроцилиндра; г) – расходы жидкости в напорной гидролинии и регулируемых дросселях распределителя; д) – моменты сопротивления повороту управляемых колес и крутящий момент на рулевом колесе; е) – угол закручивания торсионного вала и площади проходных сечений регулируемых дросселей распределителя

Когда рулевое колесо возвращается в нейтральное положение (интервал времени  $5 < t \leq 9$  с) угол закручивания торсиона  $\theta_t$  постепенно уменьшается вплоть до нуля, и начиная с момента времени  $t = 6,71$  с, он закручивается в противоположную сторону. Со сменой знака деформации торсиона поршневая полость гидроцилиндра подключается к напорной магистрали, а штоковая – к сливной, и поршень в момент времени  $t = 9$  с возвращается в положение, соответствующее нейтральному положению управляемых колес.

В течение интервала времени  $9 < t \leq 17$  с рулевое колесо поворачивается влево на  $360^\circ$  и затем возвращается в нейтральное положение. В этом случае графики изменения фазовых переменных модели аналогичны тем, что наблюдаются при повороте рулевого колеса вправо. Единственное отличие заключается в том, что при повороте влево максимальный уровень давления насоса ниже по сравнению с поворотом вправо из-за более высокого уровня передаточного отношения рулевой трапеции.

В момент остановки рулевого колеса ( $t = 18$  с) торсионный вал находится в закрученном состоянии, а гидроцилиндр продолжает поворачивать управляемые колеса. Этот поворот колес передается через поперечную тягу, вал сошки и шарико-винтовую передачу на гильзу распределителя, которая поворачивается в сторону нейтрального положения относительно золотника. Это видно по уменьшению угла закручивания торсиона с  $\theta_i = 4,761^\circ$  до  $\theta_i = 4,519^\circ$  на рис. 6, е. Уменьшение угла закручивания торсиона продолжается до тех пор пока в рабочих полостях гидроцилиндра не установится разность давлений, достаточная для уравнивания момента сопротивления повороту колес. В этот момент управляемые колеса останавливаются. Это демонстрирует кинематическое следящее действие гидроусилителя, позволяющее поворачивать управляемые колеса на требуемый угол и удерживать их в нужном положении.

#### 4. Заключение

Разработана математическая модель, описывающая процессы, происходящие в винтосечном рулевом механизме, гидроусилителе интегрального типа, насосе, напорном трубопроводе, роторном распределителе, рулевом приводе и шинах при выполнении парковочных манёвров грузового автомобиля. В моде-

ли учтены упругие и инерционные свойства ключевых элементов рулевой системы, а также нелинейные зависимости, связанные с изменением проходных сечений дроссельных окон распределителя, кинематикой рулевой трапеции, сопротивлением повороту колёс и работой насосной установки.

Модель предназначена для исследования влияния конструктивных параметров компонентов рулевой системы на её динамические характеристики.

Для оценки работоспособности модели проведено численное исследование работы рулевой системы при повороте управляемых колёс на неподвижном автомобиле с нагрузкой на управляемую ось 50 000 Н. В ходе расчётов рассматривался случай, когда водитель прикладывает к рулевому колесу синусоидальный управляющий сигнал с амплитудой  $360^\circ$  и частотой 0,25 Гц.

Результаты анализа подтвердили, что модель достоверно отражает как качественные, так и количественные характеристики работы рулевой системы.

На следующем этапе планируется проведение натурных испытаний с последующим сравнением их результатов с данными моделирования для оценки точности модели и корректировки её параметров на основе экспериментальных данных.

#### Список литературы

1. Loof J., Besselink I.J.M., Nijmeijer H. In vehicle truck steering-system modeling and validation // International Symposium on Advanced Vehicle Control, 2016, Munich, Germany.
2. Li Y., Yang Y. Front wheel angle control for steering system of intelligent commercial vehicle based on model predictive control // IET Intelligent Transport Systems. 2023. DOI: 10.1049/itr2.12407
3. Sun Y., He P., Zhang Y. Modeling and Co-simulation of Hydraulic Power Steering System // Measuring Technology and Mechatronics Automation. International Conference. 2011. DOI:10.1109/ICMTMA.2011.435
4. Hamze A.J., Ali G. Modeling and per-

#### References

1. Loof J., Besselink I.J.M., Nijmeijer H. In vehicle truck steering-system modeling and validation. In: *International Symposium on Advanced Vehicle Control*, 2016, Munich, Germany.
2. Li Y., Yang Y. Front wheel angle control for steering system of intelligent commercial vehicle based on model predictive control. *IET Intelligent Transport Systems*, 2023. DOI: 10.1049/itr2.12407
3. Sun Y., He P., Zhang Y. Modeling and Co-simulation of Hydraulic Power Steering System. In: *Measuring Technology and Mechatronics Automation, International Conference*, 2011. DOI:10.1109/ICMTMA.2011.435
4. Hamze A.J., Ali G. Modeling and per-

formance evaluation of a heavy-duty vehicle based on the hydraulic power steering system // *Simulation: transactions of the society for modeling and simulation international*. 2019. Vol. 96. No. 8.

DOI: 10.1177/0037549719866503

5. Huang S., Cao W., Qian R., Liu Y. Front wheel angle tracking control research of intelligent heavy vehicle steering system // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2021.

DOI: 10.1177/0954406220965617

6. Zhou Y., Mo Y., Huang W. Modelica-based modeling and simulation of hydraulic power steering system // *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*. 2013. Vol. 48. No. 1.

7. Watton J. *Fundamentals of Fluid Power Control*. Cambridge: Cambridge university press, 2009.

8. Akers A., Gassman M., Smith R. *Hydraulic power system analysis*. New York: Taylor & Francis Group, 2006.

9. Röst M. *Hydraulic power steering system design in road vehicles analysis: testing and enhanced functionality*. Dissertation, Linköping University, 2007.

10. Birsching J. Two Dimensional Modeling of a Rotary Power Steering Valve // *SAE Technical Paper 1999-01-0396*, 1999. DOI: 10.4271/1999-01-0396

11. Xue Y., Lewis J. Consideration of control edge geometry to power steering characteristics // *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, Xi'an, China. DOI: 10.1109/ICMA.2010.5588374

12. Marques F., Flores P., Claro J. A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems // *Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 86. No. 11. DOI: 10.1007/s11071-016-2999-3

13. Khan S., Jamal A., Ali S. Dynamic modeling and analysis of a four-bar mechanism for automobile applications // *International Conference on Electrical, Communication, and Computer Engineering*, Istanbul, Turkey, 2020.

formance evaluation of a heavy-duty vehicle based on the hydraulic power steering system. *Simulation: transactions of the society for modeling and simulation international*, 2019, Vol. 96, No. 8.

DOI: 10.1177/0037549719866503

5. Huang S., Cao W., Qian R., Liu Y. Front wheel angle tracking control research of intelligent heavy vehicle steering system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2021.

DOI: 10.1177/0954406220965617

6. Zhou Y., Mo Y., Huang W. Modelica-based modeling and simulation of hydraulic power steering system. *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, 2013, Vol. 48, No. 1.

7. Watton J. *Fundamentals of Fluid Power Control*. Cambridge, Cambridge university press, 2009.

8. Akers A., Gassman M., Smith R. *Hydraulic power system analysis*. New York, Taylor & Francis Group, 2006.

9. Röst M. *Hydraulic power steering system design in road vehicles analysis: testing and enhanced functionality*. Dissertation, Linköping University, 2007.

10. Birsching J. Two Dimensional Modeling of a Rotary Power Steering Valve. *SAE Technical Paper 1999-01-0396*, 1999. DOI: 10.4271/1999-01-0396

11. Xue Y., Lewis J. Consideration of control edge geometry to power steering characteristics. In: *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, Xi'an, China.

DOI: 10.1109/ICMA.2010.5588374

12. Marques F., Flores P., Claro J. A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems. *Nonlinear Dynamics*, 2016, Vol. 86, No. 11. DOI: 10.1007/s11071-016-2999-3

13. Khan S., Jamal A., Ali S. Dynamic modeling and analysis of a four-bar mechanism for automobile applications. In: *International Conference on Electrical, Communication, and Computer Engineering*, Istanbul, Turkey, 2020.

DOI: 10.1109/ICECCE49384.2020.9179221  
14. Sharp R., Granger R. On car steering torques at parking speeds // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part D: Journal of Automobile Engineering. 2003. Vol. 271. No. 2.

DOI: 10.1177/095440700321700202  
15. Jagt van der P. The road to virtual vehicle prototyping: new CAE-models for accelerated vehicle dynamics development. Eindhoven: Technische Universiteit, 2000.

‡ DOI: 10.1109/ICECCE49384.2020.9179221  
‡ 14. Sharp R., Granger R. On car steering  
‡ torques at parking speeds. *Proceedings of the*  
‡ *Institution of Mechanical Engineers, Part D:*  
‡ *Journal of Automobile Engineering*, 2003, Vol.  
‡ 271, No. 2.

‡ DOI: 10.1177/095440700321700202  
‡ 15. Jagt van der P. The road to virtual vehi-  
‡ cle prototyping: new CAE-models for acceler-  
‡ ated vehicle dynamics development. Eindhov-  
‡ en: Technische Universiteit, 2000.  
‡