Научно-технический вестник Брянского государственного университета, 2024, №4
Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta, 2024, No.4
DOI: 10.22281/2413-9920-2024-10-04-296-302

УДК (UDC) 625.76.08

ВНЕДРЕНИЕ ЖЕСТКОГО ТЕЛА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ В ЭЛАСТИЧНО-УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО, УСИЛЕННОЕ НА ПОВЕРХНОСТИ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПЛАСТИНОЙ

THE INTRODUCTION OF A RIGID BODY OF FINITE DIMENSIONS INTO AN ELASTIC-ELASTIC HALF-SPACE REINFORCED ON THE SURFACE BY A DEFORMABLE PLATE

Кустарев Г.В., Павлов С.А., Русинов К.А., Гусев А.А., Новоторцев Н.В.
Kustarev G.V., Pavlov S.A., Rusinov K.A., Gusev A.A., Novotortsev N.V.

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (Москва, Россия)
Moscow Automobile and Road Engineering State Technical University (Moscow, Russian Federation)

Аннотация. *В статье рассмотрена задача внедрения жесткого тела в изотропное эластично-упругое полупространство через деформируемую пластину, обладающей свойствами, характерными для тонких пластин – упругих тел с толщиной много меньше, чем остальные геометрические размеры и исследованных по теориям Кирхгофа и Пуассона. Наличие тонкой пластины меняет характеристики процесса внедрения, поскольку методы, применимые для решения прямого вдавливания в полупространство, не могут быть использованы для определения зависимости нагрузки от деформации. Интегрально-дифференциальные уравнения, определяющие внедрение жесткого тела конечных размеров, решены с использованием подхода дискретизации. Метод интегрального преобразования позволил определить оператор нагружения, составной частью которого является параметр относительной жесткости системы, состоящей из пластины и упругого полупространства. Относительная жесткость зависит от модулей упругости и геометрических параметров области контакта и упругой пластины. Проанализировано влияние жесткости упругой пластины на относительную жесткость всей системы и представлены результаты, демонстрирующие влияние жесткости пластины на задачу Буссинеска о деформировании полупространства. Решение данной задачи применимо к практической области научных исследований по уплотнению асфальтобетонных смесей различными видами уплотняющих рабочих органов, поскольку характер образования дефектов в асфальтобетонном покрытии сохраняет научный интерес к созданию альтернативной уплотняющей техники.*

Ключевые слова: *дорожный каток, жесткий валец, деформирование упругой пластины, внедряемое тело, уплотняющий штамп*

Дата получения статьи:	*04.06.2024*
Дата принятия к публикации:	*15.10.2024*
Дата публикации:	*25.12.2024*

Abstract. *The article considers the problem of embedding a rigid body into an isotropic elastic-elastic half-space through a deformable plate having properties characteristic of thin plates – elastic bodies with a thickness much smaller than other geometric dimensions and studied according to the theories of Kirchhoff and Poisson. The presence of a thin plate changes the characteristics of the embedding process, since the methods applicable to solving direct indentation into the half-space cannot be used to determine the dependence of the load on deformation. The integral differential equations determining the embedding of a rigid body of finite dimensions are solved using the discretization approach. The integral transformation method made it possible to determine the loading operator, an integral part of which is the parameter of the relative stiffness of a system consisting of a plate and an elastic half-space. The relative stiffness depends on the elastic modulus and geometric parameters of the contact area and the elastic plate. The influence of the stiffness of an elastic plate on the relative stiffness of the entire system is analyzed and the results demonstrating the effect of plate stiffness on the Boussinesq problem of deformation of a half-space are presented. The solution of this problem is applicable to the practical field of scientific research on the compaction of asphalt concrete mixtures with various types of sealing working bodies, since the nature of the formation of defects in asphalt concrete coating retains scientific interest in the creation of alternative sealing equipment.*

Keywords: *road roller, a rigid roller, deformation of an elastic plate, an embedded body, a sealing stamp.*

Date of manuscript reception:	*04.06.2024*
Date of acceptance for publication:	*15.10.2024*
Date of publication:	*25.12.2024*

DOI: 10.22281/2413-9920-2024-10-04-296-302

Сведения об авторах:

Кустарев Геннадий Владимирович – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Дорожно-строительные машины» ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет», *e-mail: proektdm@mail.ru*

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4194-2921

Павлов Сергей Аркадьевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Дорожно-строительные машины» ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет», *e-mail: dormash@madi.ru.*

Русинов Кирилл Альфредович – магистрант ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет», *e-mail: kirill.rusinov190820@yandex.ru.*

Гусев Антон Алексеевич – студент ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет», *e-mail: a.gusev@madi.ru*

Новоторцев Никита Вячеславович – студент ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет», *e-mail: nikita.nova2002@mail.ru.*

Authors' information:

Gennady V. Kustarev – Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor, Head of the Department «Road construction vehicles» at Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI), *e-mail: proektdm@mail.ru*

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4194-2921

Sergey A. Pavlov – Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor, Assistant Professor of the Department «Road construction vehicles» at Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI), *e-mail: dormash@madi.ru.*

Kirill A. Rusinov – Master's student at Moscow Automobile and Road State Technical University (MADI), *e-mail: kirill.rusinov190820@yandex.ru.*

Anton A. Gusev – Student at Moscow Automobile and Road State Technical University (MADI), *e-mail: a.gusev@madi.ru*

Nikita V. Novotorcev – Student at Moscow Automobile and Road State Technical University (MADI), *e-mail: nikita.nova2002@mail.ru.*

1. Введение

Деформирование материалов позволяет определять их свойства посредством интерпретации реакции нагрузки на деформацию. Обычно в исследованиях используют типовую форму воздействующих тел, сферическую, цилиндрическую, или плоскую. Проблема исследования сложна, если упругое полупространство полностью анизотропно, и в этом случае нереалистично ожидать, что его свойства могут быть определены на основе одного измерения деформации от нагрузки.

Решение можно найти, если исследуемый материал однороден и изотропен. В этом случае хорошо известны решения Герца для деформирования полупространства сферой без трения и Буссинеска для деформирования полупространства без трения плоской шайбой [1, 2]. Даже в случае изотропии материала результат испытания на деформирование дает только оценку совокупного влияния упругих констант G (модуль сдвига) и ν (коэффициент Пуассона).

Контактная механика – широко исследуемая тема, отраженная в работах [3-6]. Многие из классических подходов в контактной механике сосредоточены на задачах контакта тел с изотропными упругими средами.

Основные подходы, использованные при формулировке основных интегральных уравнений, могут быть расширены за счет включения трансверсально-изотропных упругих сред и применения другой формы вдавливаемых тел, например, эллиптической. Профили отклонения поверхности при деформации, определенные во время испытаний с помощью методов лазерного сканирования и корреляции цифровых изображений, могут быть использованы для установления правдоподобных оценок поперечной изотропии [7, 8].

Проблема, рассматриваемая в этой статье, включает анализ контактной задачи, в которую включены упругий слой, с конечной толщиной, а на границе между упругим слоем и нижележащим полупространством обеспечивается полная непрерывность перемещений. Трение между внедряемым телом и упругим материалом редко обсуждают в исследованиях, посвященных интерпретации реакции на деформирование [9]. Аналитические исследования проблем фрикционного контакта относительно скудны, когда учитывают такие процессы, как конечное трение и пластичность.

DOI: 10.22281/2413-9920-2024-10-04-296-302

2. Материалы и методы решения задач, принятые допущения

Тематика данной статьи отражает исследование проблемы контакта тел, которые обладают определенной жесткостью. Конкретная проблема, описанная в статье, относится к области деформирования эластично-упругого полупространства, на поверхности которого расположен тонкий упругий слой, параметры которого возможно смоделировать на основе теорий тонких пластин Пуассона и Кирхгофа [10, 11]. Задача, рассмотренная в статье, связана с деформированием по Буссинеску тонкой упругой пластины толщиной h и параметрами упругости G_n и ν_n на величину Δ под жестким штампом шириной 2a и нагрузкой P_0, расположенной поверх изотропного упругого полупространства с параметрами упругости G_c и ν_c (рис. 1) [12].

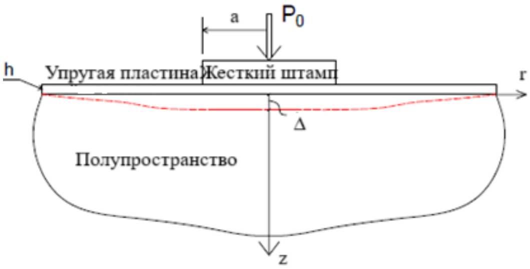

Рис. 1. Деформирование упругой пластины конечной толщины под жестким штампом

Отклонение формы тонкой упругой пластины, находящейся на поверхности области полупространства, можно получить, используя стандартные математические методы, включая симметричный характер задачи. Дифференциальное уравнение, определяющее симметричное состояние изгиба тонкой упругой пластины, примет вид:

$$KL^2\Delta + \frac{2G_c}{\pi(1-\nu_c)r}\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{s}{\sqrt{s^2-r^2}} \times \left(\frac{d}{ds}\int_0^s \frac{r\Delta dr}{\sqrt{s^2-r^2}}\right)ds = P_0, \qquad (1)$$

где K – жесткость пластины; L – оператор Лапласа для одномерной радиально-симметричной формы; Δ – прогиб пластины; G_c – модуль сдвига полупространства; ν_c – коэффициент Пуассона полупространства; r – продольное перемещение; s – поперечное перемещение; P_0 – приложенная нагрузка.

Жесткость пластины определим, как:

$$K = \frac{G_n h^3}{6(1-\nu_n^2)}, \qquad (2)$$

где ν_n – коэффициент Пуассона пластины.

Оператор Лапласа:

$$L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{rdr}. \qquad (3)$$

Граничные условия, которые введем для пластины:

а) величина прогиба определяется растяжением пластины, растяжение лежит в пределах от нуля до ширины нагрузочного штампа;

б) величина нагрузки определяется растяжением пластины, растяжение лежит в пределах от ширины штампа до бесконечности.

Кроме того, для обеспечения корректности контактной задачи можно задать условия постоянства прогиба при $r \to \infty$.

Ввиду интегро-дифференциального характера уравнения (1) маловероятно, что для поставленной смешанной задачи будет явное решение. Метод дискретизации, принятый авторами, заключается в учете того, что контактное напряжение между воздействующим телом и гибкой пластиной состоит из конечного числа кольцевых областей ac_e и ac_i постоянного воздействия (рис. 2).

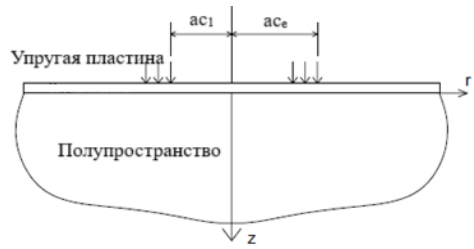

Рис. 2. Кольцевые области нагрузки пластины, связанной с упругим полупространством

Чтобы использовать безразмерное моделирование, мы предполагаем, что в каждой кольцевой области однородного контакта создается напряжение q между жестким внедряемым телом в полупространство и упругой пластиной, которое можно определить, как:

DOI: 10.22281/2413-9920-2024-10-04-296-302

$$q = p_0 \overline{\mathbf{Q}},$$

где $\overline{\mathbf{Q}}$ – безразмерное значение напряжения в кольцевой области; p_0 – среднее напряжение вдавливания.

Значение среднего напряжения определяем по формуле:

$$p_0 = \frac{P_0}{\pi a^2},$$

где P_0 – осевая нагрузка, приложенная к жесткому телу.

3. Решение

При решении задачи о нагружении кольцевой области воспользуемся методом интегрального преобразования Германа Ханкеля и получим значение оператора нагружения в следующем виде [13, 14]:

$$Z(\rho) = \frac{\Delta G_c}{p_0 a} = F(\overline{\mathbf{Q}}, c_i, c_e, \rho, \Omega), \qquad (4)$$

где c_i и $c_в$ – безразмерные значения внутреннего и внешнего радиусов кольцевого нагружения (рис. 2), при безразмерном напряжении $\overline{\mathbf{Q}}$ в кольцевой области; ρ – соотношение между продольным перемещением пластины и шириной жесткого штампа, $\rho = \frac{r}{a}$; Ω – параметр относительной жесткости системы, состоящей из пластины и упругого полупространства.

Указанный параметр будет определяться в зависимости от параметров модулей упругости пластины и упругого полупространства, а также соотношением толщины упругой пластины и размера области контакта упругой пластины с жестким штампом:

$$\Omega = \frac{(3 - 4\nu_c)}{24(1 - \nu_c)(1 - \nu_n)} \frac{G_n}{G_c} \frac{h^3}{a^3}. \qquad (5)$$

Например, относительная жесткость системы будет стремиться к нулю либо в результате бесконечного уменьшения толщины пластины, либо в результате применения пластины с бесконечно малым модулем упругости и тогда оператор нагружения (4) можно определить, решая задачу о нагружении полупространства кольцевой нагрузкой.

Если относительная жесткость системы стремится к бесконечности, то пластина должна обладать бесконечной жесткостью, поскольку для конечного модуля сдвига пластины может быть дана лишь ее определенная толщина, а в противном случае и толщина пластины будет стремиться к бесконечности и тогда решение оператора нагружения (4) сводится к нулю. Параметр относительной жесткости системы (5) играет большую роль в разработке уплотняющего оборудования нового типа. Величину относительной жесткости системы можно выбрать в качестве критерия оценки эффективности применения тех или иных штампов при уплотнении [15].

Формирование поля напряжений под штампом будет различным. Отсутствие жесткости пластины приведет к резким изменениям напряжений на границе контакта. В случае наличия жесткости эпюра напряжений будет без резких переходов. При этом вдавливание жестким телом пластины, имеющей бесконечную относительную жесткость, лежащей поверх упругого полупространства, и подвергаемой конечной нагрузке, приведет к нулевому полю перемещений. То есть ни пластина, ни полупространство деформироваться не будут (рис. 3).

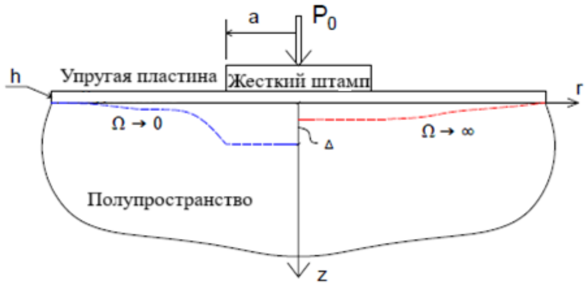

Рис. 3. Влияние относительной жесткости гибкой пластины на прогиб поверхности

Результаты дискретизации демонстрируют влияние на величину деформации коэффициента Пуассона полупространства.

В случае абсолютно хрупкого полупространства ν_c = 0, оператор нагружения (4) при одной и той же относительной жесткости системы ниже на 50%, чем в случае абсолютно несжимаемого полупространства ν_c = 0,5 (рис. 4).

Применительно к деформации сред, обладающих упруго-вязкими свойствами, и на-

DOI: 10.22281/2413-9920-2024-10-04-296-302

крытых упругой пластиной, если параметр относительной жесткости стремится к нулю, следовательно, пластина отсутствует, но полупространство содержит ограничение на растяжимость, накладываемое для соблюдения равенства кинематической совместимости между прогибом пластины и прогибом поверхности полупространства. Если совместимость прогибов нарушается, происходит потеря равновесия между средами и нарушается целостность либо пластины, либо полупространства (рис. 5).

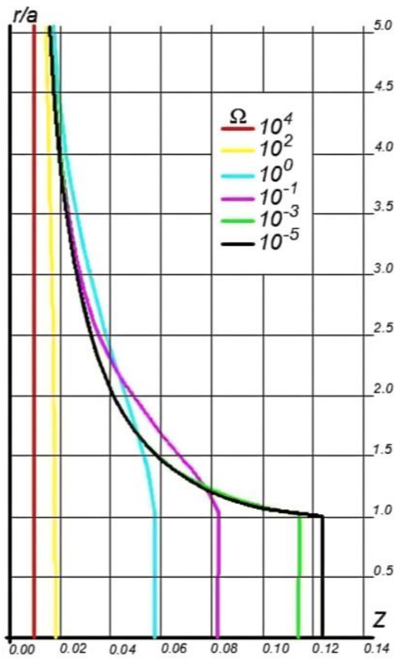

Рис. 4. Влияние относительной жесткости системы «пластина-полупространство» на оператора нагружения при абсолютно несжимаемом полупространстве

Это и соответствует случаю уплотнения жестким гладким вальцом достаточно уплотненной асфальтобетонной смеси, когда в отсутствии плоской упругой пластины кривизна поверхности вальца, а, следовательно, прогиб, значительно больше, чем плоская поверхность асфальтобетонной смеси, в результате на поверхности образуется разрыв среды, поскольку она обладает меньшим модулем сдвига, чем поверхность жесткого вальца (рис. 6).

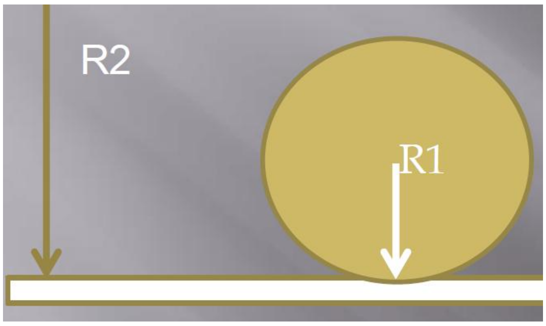

Рис. 5. Соотношение радиусов кривизны вальца катка и уплотняемой поверхности

Рис. 6. Разрыв среды под жестким вальцом, формирование трещин

4. Заключение

Оценка целостности связи в системе штамп, упругая пластина и полупространство может быть выполнена с помощью статических и динамических испытаний на вдавливание, что требует, не только времени на выполнение экспериментов, но и значительных трудозатрат на материалы. Статические испытания в этом случае будут наиболее просты. Расчетная модель, выбранная авторами, может быть также улучшена путем применения других физико-математических моделей, которые смогут учитывать деформации, как при изгибе, так и при сдвиге.

Исследование реакции на вдавливание упругой пластины при существовании адгезии между ней и полупространством применительно к области уплотнения горячих асфальтобетонных материалов, позволяет сделать вывод о недостаточной рационализации использования цилиндрических уплотняющих рабочих органов на завершающей стадии уплотнения. Наличие между органом дорожного катка и асфальтобетонной смесью плоской упругой пластины позволит значительно снизить вероятность появления трещин при строительстве покрытий.

DOI: 10.22281/2413-9920-2024-10-04-296-302

Список литературы

1. Hertz H. Uber die Beruhrung fester elastischer Korper // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1881. № 92. P. 156-171.

2. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / Под ред. Н.Х. Арутюняна. М.: Наука, 1983. 488 с.

3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.

4. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

5. Алейников С.М. Метод граничных элементов в контактных задачах для упругих пространственно неоднородных оснований: дисс. ... доктора техн. наук: 05.23.17, 05.23.02. М., 2000. 768 с.

6. Pfeiffer F., Bremer H. The Art of Modeling Mechanical Systems // CISM International Centre for Mechanical Sciences, 2017. 392 p.

7. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Двумерная нестационарная задача упругой диффузии для изотропного однокомпонентного слоя // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56, № 6(334). С. 102-110. DOI: 10.15372/PMTF20150612

8. Хохлов А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2017. Т. 21, № 2. С. 326-361. DOI: 10.14498/vsgtu1533

9. Wan C., Zhang X., Wang L. Three-dimensional micromechanical finite element analysis on gauge length dependency of the dynamic modulus of asphalt mixtures // Road Materials and Pavement Design. 2012. Vol. 13, No. 4. Pp. 769-783. DOI: 10.1080/14680629.2012.732194

10. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.

11. Жилин П.А. О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Известия Российской Академии Наук. Механика твердого тела. 1992. №3. С. 48-64.

References

1. Hertz H. Uber die Beruhrung fester elastischer Korper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1881, No. 92, pp. 156-171.

2. Aleksandrov V.M., Mhitaryan S.M. *Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiyami i proslojkami* [Contact problems for bodies with thin coatings and layers]. Arutyunyan N. H. (Ed.). Moscow, Nauka, 1983. 488 p. (In Russian)

3. Galin L.A. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti* [Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity]. Moscow, Nauka, 1980. 304 p. (In Russian)

4. Lur'e A.I. *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical Mechanics]. Moscow, Fizmatgiz, 1961. 824 p. (In Russian)

5. Alejnikov S.M. Metod granichnyh elementov v kontaktnyh zadachah dlya uprugih prostranstvenno neodnorodnyh osnovanij. Diss. Doc. Sci. (Engineering). Moscow, 2000. 768 p. (In Russian)

6. Pfeiffer F., Bremer H., The Art of Modeling Mechanical Systems. *CISM International Centre for Mechanical Sciences*, 2017, 392 p.

7. Zemskov A.V., Tarlakovskij D.V. Two-dimensional unsteady elastic diffusion problem for an isotropic single-component layer. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2015, Vol. 56, No. 6(334), pp. 102-110. DOI: 10.15372/PMTF20150612. (In Russian)

8. Hohlov A.V. Analysis of the general properties of creep curves under cyclic step loads generated by the linear theory of heredity. *Vestnik Samarskogo gosudarstvenogo tekhnicheskogo. universiteta. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2017, Vol. 21, No. 2, pp. 326-361. DOI: 10.14498/vsgtu1533. (In Russian)

9. Wan C., Zhang X., Wang L. et al. Three-dimensional micromechanical finite element analysis on gauge length dependency of the dynamic modulus of asphalt mixtures. *Road Materials and Pavement Design*, 2012, Vol. 13, No. 4, pp. 769–783. DOI: 10.1080/14680629.2012.732194.

10. Gol'denvejzer A.L. *Teoriya uprugih tonkih obolochek* [Theory of elastic thin shells]. Moscow, Nauka, 1976. 512 p. (In Rus-

DOI: 10.22281/2413-9920-2024-10-04-296-302

12. Boussinesque M.J. Complément à une étude de 1871 sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1879. Ser. 3, Vol. 5. P. 329-344.

13. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.

14. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Издательство АН СССР, 1967. 420 с.

15. Кустарев Г.В., Павлов С.А., Жарцов П.Е. Моделирование процесса уплотнения материала через упругий элемент // Вестник машиностроения. 2013. № 12. С. 39-41.

sian)

11. Zhilin P.A. On the theories of Poisson and Kirchhoff plates from the standpoint of modern plate theory. *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 1992, No. 3, pp. 48-64. (In Russian)

12. Boussinesque M.J. Complément à une étude de 1871 sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1879, Ser. 3, Vol. 5, pp. 329-344.

13. Brychkov Yu.A., Prudnikov A.P. *Integral'nye preobrazovaniya obobshchennyh funkcij* [Integral transformations of generalized functions]. Moscow, Nauka, 1977. 288 p. (In Russian)

14. Uflyand Ya.S. *Integral'nye preobrazovaniya v zadachah teorii uprugosti* [Integral transformations in problems of elasticity theory]. Leningrad, Izdatelstvo AN SSSR, 1967. 420 p. (In Russian)

15. Kustarev G.V., Pavlov S.A., Zharcov P.E. Modeling the process of compaction of a material through an elastic element. *Vestnik mashinostroeniya*, 2013, No. 12, pp. 39-41. (In Russian)