

УДК (UDC) 625.1/.5

АПРОКСИМАЦИЯ СТАТИЧЕСКОЙ УПРУГОЙ ЛИНИИ НЕСУЩЕГО КАНАТА  
ПРИ ТЯГОВОМ РАСЧЕТЕ ОДНОПРОЛЕТНЫХ МОБИЛЬНЫХ КАНАТНЫХ ДОРОГAPPROXIMATION OF THE STATIC ELASTIC LINE OF THE CARRYING ROPE IN  
THE TRACTION CALCULATION OF SINGLE-SPAN MOBILE ROPEWAYSЛагереv А.В.  
Lagerev A.V.Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского (Брянск, Россия)  
Academician I.G. Petrovskii Bryansk State University (Bryansk, Russian Federation)

**Аннотация.** В процессе эксплуатации грузовых и пассажирских подвесных канатных дорог несущие тяговые канаты подвержены естественному провисанию под действием собственного веса, транспортируемого груза или пассажирских кабин, ветрового и температурного воздействия. Умение моделировать геометрическую форму каната с учетом условий и режимов эксплуатации канатных дорог оказывается необходимым при проектировании и моделировании рабочих процессов в канатной системе, оптимизации конструкции и характеристик приводного и натяжного механизмов. В данной статье представлена методика определения аналитической зависимости, аппроксимирующей конфигурацию статической упругой линии несущего каната, применительно к задаче тягового расчета одноканатных однопролетных мобильных канатных дорог. Особенностью предложенного подхода является учет неравенства усилий натяжения несущего тягового каната на концах пролета, что позволяет более адекватно отразить реальную ситуацию.

**Ключевые слова:** канатная дорога, несущий канат, провисание, аппроксимация упругой линии.

**Дата получения статьи:** 14.08.2023  
**Дата принятия к публикации:** 01.10.2023  
**Дата публикации:** 25.12.2023

**Сведения об авторах:**

Лагереv Александр Валерьевич – доктор технических наук, профессор, заместитель директора по научной работе НИИ фундаментальных и прикладных исследований ФГБОУ ВПО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского», e-mail: [bsu-avl@yandex.ru](mailto:bsu-avl@yandex.ru).  
ORCID: 0000-0003-0380-5456

**Abstract.** During the operation of cargo and passenger aerial ropeways, carrying-traction ropes are subject to natural sagging under the influence of their own weight, transported cargo or passenger cabins, wind and temperature effects. The ability to model the geometric shape of a rope, taking into account the conditions and operating modes of ropeways, is necessary when designing and modeling work processes in the rope system, optimizing the design and characteristics of the drive and tension mechanisms. This article presents a method for determining the analytical dependence approximating the configuration of the static elastic line of the carrying-traction rope, in relation to the problem of traction calculation of single-channel single-span mobile ropeways. The peculiarity of the proposed approach is to take into account the inequality of the tension forces of the carrying-traction rope at the ends of the span, which makes it possible to more adequately reflect the real situation.

**Keywords:** ropeway, carrying rope, sagging, approximation of an elastic line.

**Date of manuscript reception:** 14.08.2023  
**Date of acceptance for publication:** 01.10.2023  
**Date of publication:** 25.12.2023

**Authors' information:**

Alexander V. Lagerev - Doctor of Technical Sciences, Professor, Vice director of Research Institute of Fundamental and Applied Research, Academician I.G. Petrovskii Bryansk State University,  
e-mail: [bsu-avl@yandex.ru](mailto:bsu-avl@yandex.ru).  
ORCID: 0000-0003-0380-5456

**Благодарности**

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00798)

**Acknowledgements**

The study was supported by the grant of Russian science Foundation (project No. 22-29-00798)

## 1. Введение

Мобильные канатные дороги в настоящее время рассматриваются как один из перспективных видов грузового или грузо-пассажирского транспорта [1]. Несмотря на значительное естественное сходство [2], которое имеют между собой мобильные и уже хорошо зарекомендовавшие стационарные канатные дороги, тем не менее, реализация функции мобильности требует не только внедрения новых специфических конструкций аналогичных механизмов и узлов, но также разработки и использования при проектировании новых специфических математических моделей и вычислительных алгоритмов [2-4].

Одной из наиболее ответственных и наиболее нагруженных систем подвесных канатных дорог является несущее-тяговая канатная система [5, 6]. Под действием собственного веса несущее-тягового каната и веса транспортируемого груза (включая грузозахватное устройство) в пролете между канатными шкивами однопролетной мобильной канатной дороги наблюдается статическое провисание несущее-тяговой канатной системы [6-8]. На статическое провисание дополнительно накладывается нестационарное динамическое провисание в виде колебательного процесса относительно статического положения вследствие действия инерционных нагрузок при движении каната и груза с переменной скоростью и ветрового воздействия на них [9-11].

## 2. Постановка задачи

Задача математического представления упругой линии провисания несущего каната под действием силы тяжести при расчете стационарных многопролетных и мобильных однопролетных канатных дорог рассматривалась ранее в ряде исследований. В частности, в [7, 12- 5] для аппроксимации упругой линии предварительно натянутого каната  $y(x)$  без учета дискретного размещения на нем транспортируемого груза (или нескольких грузов разного веса) предлагается параболическая зависимость вида

$$y(x) = -\frac{q}{2H}(lx - x^2) + c\frac{x}{l}, \quad (1)$$

где  $q$  - распределенная нагрузка на канат от собственного веса и внешней нагрузки;  $H$  - продольная сила натяжения каната;  $l$  - расстояние между опорами;  $c$  - разность высотного расположения концов закрепления каната на опорах.

В [16-19] для аппроксимации упругой линии предварительно натянутого каната  $y(x)$  без учета дискретного размещения на нем транспортируемого груза (или нескольких грузов разного веса) предлагается гиперболическая зависимость. В [16] она выражается суммированием провисания идеально гибкого нерастяжимого каната  $y_0(x)$ , характеризующегося формой цепной линии [20], и добавки, учитывающей упругость каната  $\delta y(x)$ :

$$y(x) = y_0(x) + \delta y(x)$$

или

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x-x_m}{a}\right) - c - \frac{g q_L}{2EA} a^2 \sinh^2\left(\frac{x-x_m}{a}\right),$$

где  $g$  - ускорение свободного падения;  $q_L$  - погонная масса каната;  $E$  - модуль упругости каната;  $A$  - площадь поперечного сечения каната;  $a$ ,  $x_m$ ,  $c$  - коэффициенты, определяющие конфигурацию каната, исходя из граничных условий его закрепления на опорах.

Очевидно, учет дискретности распределения сосредоточенных грузов вдоль продольной линии несущего каната требует использования более сложных математических зависимостей, основанных на использовании теории упругости канатных систем [21], и, как следствие, требует разработки специальных вычислительных алгоритмов преимущественно на основе численных методов (например, метода конечных элементов). В частности, подобные подходы и вычислительные алгоритмы рассмотрены в [22-24].

Как справедливо отмечено в [25], численный расчет конфигурации несущего каната между соседними опорами и провисания всей канатной системы в случае многоопорной канатной дороги от дискретно приложенных нагрузок от транспортируемого груза в этом случае занимает существенное

время, что затрудняет реализацию оптимизационного подхода при проектировании и моделировании эксплуатации канатных дорог. Это обстоятельство, несмотря на принципиальную возможность в настоящее время выполнять достаточно детальные расчеты конфигурации канатных систем с учетом дискретных нагрузок от транспортируемых грузов, не исключает потребность использования менее точных аппроксимаций конфигурации несущих и несуще-тяговых канатов стационарных и мобильных канатных дорог на основе простейших аналитических зависимостей.

Указанный подход был реализован при построении математических моделей техни-

$$q_{Rkmm} = \sqrt{(q_{cabm} + q_{kn})^2 + (p_{cab} + p_{kmm})^2} = \sqrt{\left( q_{kn0} d_{kn}^2 + \mu_m \frac{Q_{cab}}{n_{kn} L_{cab}} \right)^2 + w_0^2 \left( \eta_m C_{wkn} k_{wkn} d_{kn} + \mu_{wm} C_{wcab} k_{wcab} \frac{A_{cab}}{n_{kn} L_{cab}} \right)^2}, \quad (2)$$

где  $q_{cabm}$  - распределенная нагрузка на  $m$ -й несущий канат от транспортируемого груза или пассажирской кабины;  $q_{kn}$  - распределенная нагрузка от собственного веса каната;  $p_{cab}$  - горизонтальная поперечная составляющая ветрового давления на транспортируемый груз или пассажирскую кабину;  $p_{kmm}$  - горизонтальная поперечная статическая составляющая ветрового давления на  $m$ -й несущий канат;  $d_{kn}$  - диаметр несущего каната;  $Q_{cab}$  - вес транспортируемого груза или пассажирской кабины;  $L_{cab}$  - расстояние между соседними грузами или кабинами;  $n_{kn}$  - число несущих канатов;  $q_{kn0}$  - эмпирический коэффициент [32];  $\mu_m, \mu_{wm}$  - коэффициенты неравномерности распределения весовой и ветровой нагрузки на  $m$ -й несущий канат от транспортируемого груза или пассажирской кабины;  $\eta_m$  - коэффициент ослабления давления ветра на поверхность  $m$ -го несущего каната для ряда параллельно расположенных канатов [33];  $w_0$  - нормативное значение ветрового давления [33] в зависимости от номера ветрового района [34];  $C_{wkn}, C_{wcab}$  - аэродинамические коэффициенты несущего каната [33] и транспортируемого груза или

ко-экономической оптимизации многопролетных стационарных канатных дорог с опорами произвольной высоты [26, 27] и унифицированными опорами дискретно-переменной высоты [28, 29], а также однопролетных мобильных канатных дорог маятникового типа [30, 31]. При этом, как было предложено в [32], совокупность распределенной нагрузки от собственного веса каната, сосредоточенных нагрузок от дискретно расположенных транспортируемых грузов и ветровой нагрузки представляется в виде комплексной распределенной нагрузки на  $m$ -й канат (при многоканатной подвесной системе):

пассажирской кабины;  $k_{wkn}, k_{wcab}$  - коэффициенты возрастания ветрового давления с высотой от поверхности [33], рассчитанные для высоты расположения оси каната и центра тяжести груза или кабины;  $A_{cab}$  - расчетная площадь транспортируемого груза или пассажирской кабины (площадь проекции на вертикальную плоскость).

Как результат, применительно к однопролетным мобильным канатным дорогам, для которых относительная стрела провисания (отношение стрелы провисания  $f$  к величине пролета  $L_{rp}$ ) несуще-тягового каната составляет  $f / L_{rp} < 0,1$ , преобразование представленной в [14] параболической зависимости (1) с погрешностью менее 1,3% позволяет геометрическую линию статического провисания несуще-тягового каната  $y_r(x)$  выразить следующей параболической зависимостью [32]:

- при форме I провисания несуще-тягового каната, когда стрела провисания находится внутри пролета канатной дороги

$$y_r(x) = \begin{cases} y_A - \psi_d \frac{q_{Rcr} x^2}{S_k}, & 0 \leq x \leq a \\ y_A + \psi_d \frac{q_{Rcr} x(x-2a)}{S_k}, & a \leq x \leq L_{rp} \end{cases}; \quad (3)$$

- при форме II провисания несущего-тягового каната, когда стрела провисания (при экстраполяции геометрической линии каната за пределы пролета) находится снаружи пролета канатной дороги или совпадает с одной из крайних опор

$$y_r(x) = y_A + x \left[ \operatorname{tg} \alpha_{sl} - \psi_d \frac{q_{Rcr}}{2S_k} (L_{rp} - x) \right], \quad (4)$$

где  $\alpha_{sl}$  - угол наклона опорной поверхности в пределах пролета;  $\psi_d$  - коэффициент динамичности [22];  $S_k$  - продольная сила натяжения каната;  $a$  - расстояние в плане между центром канатного шкива и сечением максимального провисания каната;  $q_{Rcr}$  - суммарная распределенная нагрузка на несущий-тяговый канат при одноканатном исполнении мобильной канатной дороги, определяемая в соответствии с зависимостью (2).

Для однопролетных канатных дорог продольные осевые усилия натяжения несущего-тягового каната на канатных шкивах концевых опор  $A$   $T_{kA}$  и  $B$   $T_{kB}$  определяются зависимостями [31]:

- при форме I провисания несущего-тягового каната

$$T_{kA} = \frac{S_k}{\cos \alpha_{rpA}} = S_k \sec \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{\psi_d q_{Rcr} a}{S_k} \right) \right], \quad (5)$$

$$T_{kB} = \frac{S_k}{\cos \alpha_{rpB}} = S_k \sec \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{\psi_d q_{Rcr} (L_{rp} - a)}{S_k} \right) \right]; \quad (6)$$

- при форме II провисания несущего-тягового каната

$$T_{kA} = \frac{S_k}{\cos \alpha_{rpA}} = S_k \sec \left[ \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \alpha_{sl} - \psi_d \frac{q_{Rcr}}{2S_k} L_{rp} \right) \right], \quad (7)$$

$$T_{kB} = \frac{S_k}{\cos \alpha_{rpB}} = S_k \sec \left[ \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \alpha_{sl} + \psi_d \frac{q_{Rcr}}{2S_k} L_{rp} \right) \right]. \quad (8)$$

Несмотря на то, что расчет продольных осевых усилий натяжения несущего-тягового каната согласно зависимостям (5) – (8) дает неравные значения этих усилий на крайних опорах однопролетной канатной дороги (случай  $T_{kA} = T_{kB}$  имеет место лишь при угле

$\alpha_{sl} = 0$ ), однако их неравенство определяется перепадом высотных отметок оголовков опор, т. е. углами наклона к горизонтальной плоскости  $\alpha_{rpA}$  и  $\alpha_{rpB}$  соответственно, тогда как продольная сила натяжения каната в этих точках  $S_k = \text{const}$ .

Как показывают многочисленные исследования на основе проведения тяговых расчетов диаграмм изменения усилий натяжения по длине гибкого тягового или тягово-несущего рабочего органа транспортирующих машин, например, ленточных конвейеров [35-37] и транспортеров [38], откатных канатных установок [8], канатных дорог [6, 31], канатных паромов и др., величины продольных осевых усилий  $T_{kA}$  и  $T_{kB}$  оказываются неравными также вследствие наличия сил сопротивления перемещению каната совместно с транспортируемым грузом.

Представление о том, как изменяется продольное усилие натяжения несущего-тягового каната  $T_k$  по длине несущего-тяговой канатной системы дает рис. 1 [40]. Количественные данные соответствуют однопролетной одноканатной мобильной канатной дороге с величиной пролета  $L_{rp} = 100$  м, длиной концевых опор  $l_t = 10$  м, весом и вертикальным габаритом транспортируемого груза  $G_c = 10$  кН и  $h_G = 2$  м при отсутствии ветрового воздействия. Натяжение  $T_k$  существенно изменяется по длине канатной системы, а также в зависимости от направления перемещения транспортируемого груза.

Как следствие, расчет продольных сил натяжения каната  $S_{kA}$  и  $S_{kB}$ , исходя из известных в результате тягового расчета продольных осевых усилий  $T_{kA}$  и  $T_{kB}$ , показывает, что  $S_{kA} \neq S_{kB}$ , причем эти усилия могут весьма значительно отличаться между собой. Таким образом, допущение о том, что в пролете  $S_k = \text{const}$ , нельзя считать верным, т.е. необходимо учитывать  $S_{kA} \neq S_{kB}$ , причем величина  $S_k$  является переменной в пределах пролета.

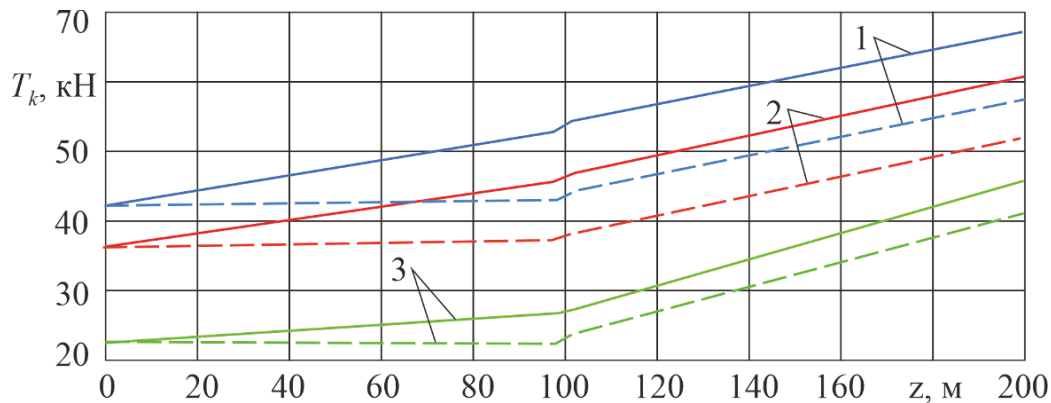


Рис. 1. Изменение продольного усилия натяжения несущего каната по длине несущего канатной системы [40]: 1 -  $\alpha_{sl} = 5^\circ$ ; 2 -  $\alpha_{sl} = 10^\circ$ ; 3 -  $\alpha_{sl} = 30^\circ$  (— - груз перемещается по направлению к установке B; - - - - груз перемещается по направлению к установке A)

Установленное неравенство (зачастую, существенное) величин горизонтального усилия натяжения несущего каната  $S_k$  на соседних опорах пролета мобильной канатной дороги требует внесения уточнений в расчетные зависимости (3) – (8), т.е. требует уточнения положения в пространстве геометрической линии статического провисания несущего каната  $y_r(x)$  и углов его наклона к горизонтальной плоскости  $\alpha_{rpA}$  и  $\alpha_{rpB}$ .

### 3. Аппроксимация провисания каната

Требуемое минимальное продольное осевое усилие натяжения несущего каната мобильной канатной дороги определяется, исходя из необходимости обеспечения минимально допустимого приближения транспортируемого груза к поверхности земли с учетом находящихся на ней вдоль трассы дороги объектов инфраструктуры и растительности [31, 39]. Это усилие, как правило, следует обеспечить с помощью механизма натяжения каната в точке его сбегания с приводного канатного шкива, который рекомендуется задействовать на концевой опоре B с наибольшей высотной отметкой (отметка  $v_B$ ). В этом случае канатный шкив опоры B является приводным, тогда как опора A непосредственно связана с механизмом натяжения каната. Дальнейшее изменение величины продольного осевого усилия натяжения несущего каната

каната  $T_k(z)$  по длине определяется на основании тягового расчета мобильной канатной дороги. Для этого можно использовать подход и ориентироваться на расчетные соотношения, приведенные в [39].

Так как тяговый расчет позволяет определять в характерных  $i$ -х расчетных точках несущего канатной системы продольные осевые усилия натяжения каната  $T_{ki}$ , то для использования зависимостей типа (3) и (4) требуется нахождение в тех же характерных  $i$ -х расчетных точках горизонтальных усилий натяжения каната  $S_{ki}$ . Для этого можно использовать соотношения (5) – (8), преобразование которых приводит к следующим нелинейным алгебраическим уравнениям относительно неизвестных  $S_{ki}$ :

- при форме II провисания каната

$$S_{kA} \sec \left[ \arctg \left( \frac{\psi_d q_{Rcr} a}{S_{kA}} \right) \right] - T_{kA} = 0, \quad (9)$$

$$S_{kB} \sec \left[ \arctg \left( \frac{\psi_d q_{Rcr} (L_{rp} - a)}{S_{kB}} \right) \right] - T_{kB} = 0; \quad (10)$$

- при форме I провисания каната

$$S_{kA} \sec \left[ \arctg \left( \operatorname{tg} \alpha_{sl} - \psi_d \frac{q_{Rcr} L_{rp}}{2S_{kA}} \right) \right] - T_{kA} = 0, \quad (11)$$

$$S_{kB} \sec \left[ \arctg \left( \operatorname{tg} \alpha_{sl} + \psi_d \frac{q_{Rcr} L_{rp}}{2S_{kB}} \right) \right] - T_{kB} = 0. \quad (12)$$

Тогда углы наклона несущего-тягового каната к горизонтальной плоскости в характерных точках будут составлять:

$$\alpha_{rpA} = \mp \arccos(S_{kA} / T_{kA});$$

$$\alpha_{rpB} = \arccos(S_{kB} / T_{kB}),$$

где знак в числителе относится к форме I провисания каната, знак в знаменателе – к форме II провисания каната.

Очевидно, рассмотренные ранее расчетные зависимости (3) и (4) не позволяют адекватно выразить геометрическую линию статического провисания несущего-тягового каната с учетом выявленных физических особенностей. Учитывая возможность определения для геометрической линии  $y_r(x)$  четырех граничных величин (по две на каждом ее конце – в точках A и B), целесообразно искомую геометрическую кривую выразить в виде параболической зависимости – в виде поли-

нома третьей степени с четырьмя неизвестными коэффициентами:

$$y_r(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3, \quad (13)$$

где  $d_0, d_1, d_2, d_3$  - неизвестные коэффициенты полинома.

Указанные четыре неизвестных коэффициента  $d_0, d_1, d_2, d_3$  находятся решением системы четырех уравнений, каждое из которых выражает одно из известных граничных условий (рис. 2):

$$y_r(x=0) = y_A;$$

$$y_r(x=L_{rp}) = y_B;$$

$$\left. \frac{dy_r(x)}{dx} \right|_{x=0} = \mp \operatorname{tg} \alpha_{rpA};$$

$$\left. \frac{dy_r(x)}{dx} \right|_{x=L_{rp}} = \operatorname{tg} \alpha_{rpB}.$$

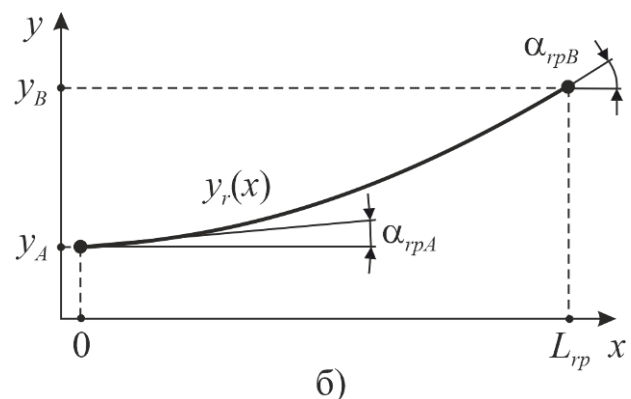
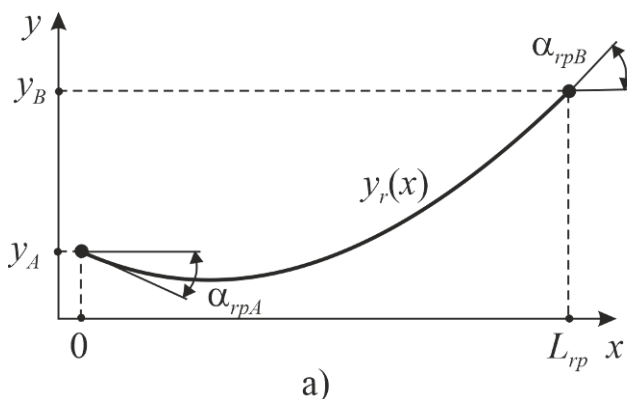


Рис. 2. Расчетные схемы аппроксимации геометрической линии статического провисания несущего-тягового каната при его характерных формах: а – форма I; б – форма II

Таким образом, эти граничные условия позволяют построить систему линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} d_0 = y_A \\ d_0 + d_1L_{rp} + d_2L_{rp}^2 + d_3L_{rp}^3 = y_B \\ d_1 = \mp \operatorname{tg} \alpha_{rpA} \\ d_1 + 2d_2L_{rp} + 3d_3L_{rp}^2 = \operatorname{tg} \alpha_{rpB} \end{cases} \quad (14)$$

или в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L_{rp} & L_{rp}^2 & L_{rp}^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2L_{rp} & 3L_{rp}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_A \\ y_B \\ \mp \operatorname{tg} \alpha_{rpA} \\ \operatorname{tg} \alpha_{rpB} \end{bmatrix}.$$

Решение системы уравнений (14) позволяет получить расчетные соотношения для коэффициентов параболической аппроксимации геометрической линии статического провисания несущего-тягового каната вида (13):

$$d_0 = y_A;$$

$$d_1 = \mp \operatorname{tg} \alpha_{rpA};$$

$$d_2 = \frac{3(y_B - d_0 - d_1L_{rp}) / L_{rp} - (\operatorname{tg} \alpha_{rpB} - d_1)}{L_{rp}};$$

$$d_3 = -\frac{(2y_B - d_0 - d_1L_{rp}) / L_{rp} - (\operatorname{tg} \alpha_{rpB} - d_1)}{L_{rp}^2}.$$

#### 4. Обсуждение результатов

Применительно к диаграммам изменения продольного усилия натяжения несущего каната по длине несущего канатной системы, представленным на рис. 1, на рис. 3 и 4 показаны геометрические линии статического провисания каната и величины провисания

$$\Delta f(x) = (h_{t,A} + l_{t,A} + x \operatorname{tg} \alpha_{sl}) - y_r(x)$$

при расчетах с помощью зависимостей (3) и (4) для двух значений горизонтальных усилий натяжения каната  $S_k = S_{kA}$  и  $S_k = S_{kB}$ , а также с помощью аппроксимации кубическим полиномом (13).

Расчет по соотношениям (3) и (4) дает заметно разные значения в зависимости от того, какое значение  $S_k$  было использовано -  $S_{kA}$  или  $S_{kB}$ . Разница в величине стрелы провисания может достигать нескольких метров, что является существенным, учитывая относительно небольшую длину мобильной канатной дороги. Расчет с помощью кубического полинома (13) позволяет получить геометрическую линию статического провисания каната, лежащую между граничными линиями  $y_r(x)$  согласно расчета по зависи-

мостям (3) и (4). Таким образом, аппроксимацию кубическим полиномом (13) можно рассматривать как более адекватно отражающую действительное положение геометрической линии статического провисания несущего каната.

Следует отметить, что углы наклона несущего каната в точках набегания и сбегания с одного и того же канатного шкива не равны, т.е.

$$\alpha_{rpA,1} \neq \alpha_{rpA,2} \text{ и } \alpha_{rpB,1} \neq \alpha_{rpB,2},$$

где «1» и «2» - номера параллельных ветвей каната по ходу его движения, причем ветвь «1» начинается в точке сбегания каната с приводного канатного шкива, а ветвь «2» - в точке сбегания с натяжного канатного шкива.

Согласно данным [31], разница в их величинах может достигать нескольких градусов. Однако обязательным условием качественной работы однопролетной мобильной канатной дороги является угловая согласованность набегания и сбегания каната с канатного шкива, так как согласно известным экспериментальным данным (например, [40]) даже незначительные отклонения продольной оси грузонесущего каната из плоскости канатного шкива приводят к повышенному износу про-

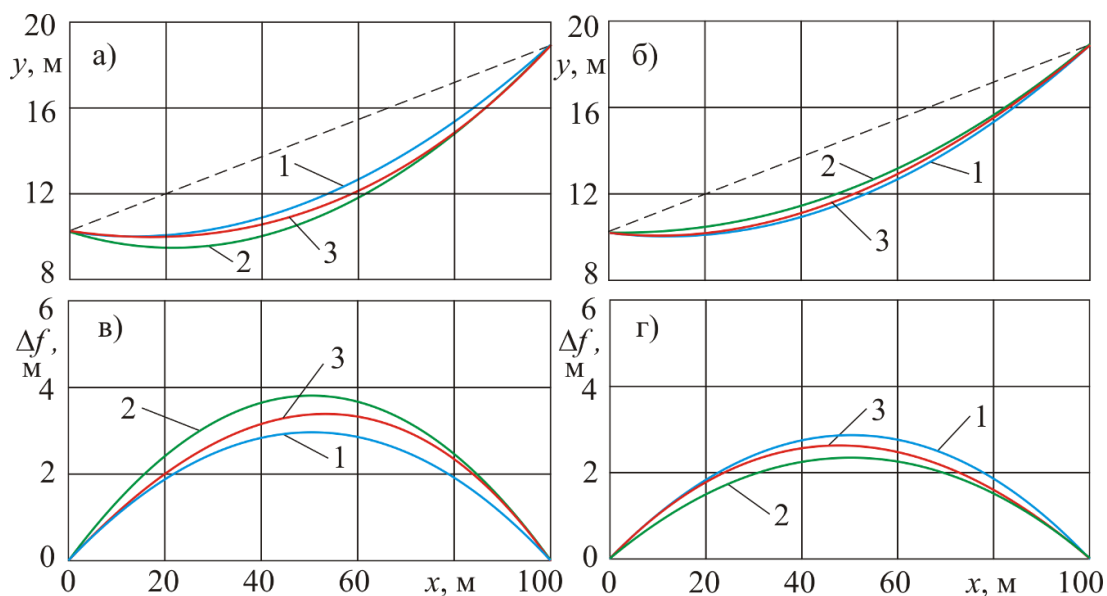


Рис. 3. Диаграммы статического провисания несущего каната при использовании различных расчетных зависимостей ( $\alpha_{sl} = 5^\circ$ ): а – геометрическая линия каната, ветвь 1;

б – геометрическая линия каната, ветвь 2; в – величина провисания, ветвь 1;

г – величина провисания, ветвь 2 (1 – расчет по (3) для  $S_k = S_{kA}$ ; 2 – расчет по (4) для  $S_k = S_{kB}$ ; 3 – расчет по (13))

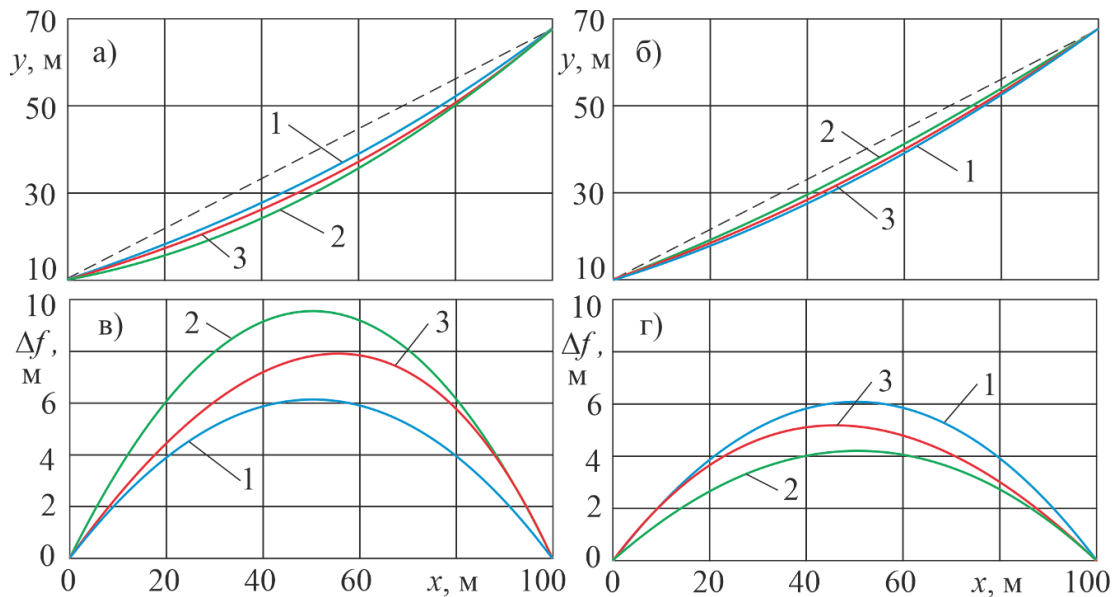


Рис. 4. Диаграммы статического провисания несущего-тягового каната при использовании различных расчетных зависимостей ( $\alpha_{sl} = 30^\circ$ ): а – геометрическая линия каната, ветвь 1; б – геометрическая линия каната, ветвь 2; в – величина провисания, ветвь 1; г – величина провисания, ветвь 2 (1 – расчет по (3) для  $S_k = S_{kA}$ ; 2 – расчет по (4) для  $S_k = S_{kB}$ ; 3 – расчет по (13))

филированного ручья шкива и самого каната. Согласно [40] отклонение оси ручья шкива от оси каната не должно превышать  $1^\circ$  во избежание интенсивного изнашивания как профилированного ручья шкива, так и самого несущего-тягового каната. Интенсивный износ ведет к снижению ресурса работы элементов канатной системы мобильной канатной дороги и безопасности ее эксплуатации. Поэтому при проектировании несущего-тяговой канатной системы следует предусматривать необходимые конструктивные мероприятия.

Данные рис. 3 и 4 количественно подтверждают факт отличия величины углов набегания и сбегания с канатного шкива ( $\alpha_{rpA,1}$  и  $\alpha_{rpA,2}$ ,  $\alpha_{rpB,1}$  и  $\alpha_{rpB,2}$ ): для приводного канатного шкива (опора В) при наклоне поверхности  $\alpha_{sl} = 5^\circ$  разница  $|\alpha_{rpB,2} - \alpha_{rpB,1}|$  составляет  $3,3^\circ$ , при  $\alpha_{sl} = 30^\circ$  –  $7,1^\circ$ . Для натяжного (неприводного) канатного шкива (опора А) – соответственно  $0,1^\circ$  и  $0,3^\circ$ . Такое расхождение обусловлено тем, что для приводного канатного шкива разница величин осевого усилия натяжения несущего-тягового каната в точках набегания и сбегания существенно больше, чем для натяжного канатного шкива.

## 5. Заключение

В процессе эксплуатации подвесных канатных дорог факт движения загруженного несущего-тягового каната в условиях совместного функционирования приводного и натяжного механизмов обуславливает изменение осевого усилия натяжения каната по его длине между крайними опорами пролета дороги. Опыт проведения тяговых расчетов мобильных канатных дорог применительно к их реальным техническим характеристикам, которые позволяют построить диаграммы изменения осевого усилия натяжения несущего-тягового каната, показывает, что наблюдаемая разница в величинах усилий натяжения на крайних опорах пролета может достигать значительной величины. Как следствие, аппроксимация статической упругой линии естественного провисания каната с помощью хорошо известных приближенных параболической и гиперболической зависимостей, исходя из полученных при тяговом расчете мобильной канатной дороги значений осевого усилия натяжения несущего-тягового каната для разных концов пролета, приводит к получению двух существенно различных геометрических конфигураций каната с существ-



венно различными количественными характеристиками. Это обусловлено тем, что указанные зависимости получены для случая постоянства осевого усилия натяжения каната по длине пролета.

Предложенный в статье подход к аппроксимации статической упругой линии естест-

венного провисания несущего каната, учитывающий действительное неравенство осевого усилия натяжения каната по длине пролета, позволяет более адекватно отразить реально существующую ситуацию с провисанием каната и оценить его количественные характеристики.

### Список литературы

1. Степченко Т.А., Бабич О.В. Результаты научных исследований Брянского государственного университета в сфере мобильных транспортно-перегрузочных канатных систем и комплексов // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. 2021. № 1. С. 9-29. DOI: 0.22281/2413-9920-2021-07-01-09-29
2. Короткий А.А., Лагереv А.В., Месхи Б.Ч., Лагереv И.А., Панфилов А.В., Таричко В.И. Транспортно-логистические технологии и машины для цифровой урбанизированной среды. Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2019. 268 с. DOI: 10.5281/zenodo.3551132
3. Лагереv А.В., Лагереv И.А., Таричко В.И. Моделирование рабочих процессов мобильных транспортно-перегрузочных канатных комплексов. Брянск: РИСО БГУ, 2021. 204 с. DOI: 10.5281/zenodo.6044972
4. Степченко Т.А., Бабич О.В. Результаты научных исследований Брянского государственного университета в 2022 году в сфере создания мобильных канатных дорог и лесных канатных машин на базе самоходных колесных шасси // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. 2023. № 1. С. 9-27. DOI: 10.22281/2413-9920-2023-09-01-9-27
5. Вопросы теории и расчета подъемно-транспортных машин / Под общ. ред. А.И. Дукельского. М.-Л.: Машгиз, 1957. 181 с.
6. Дукельский А.И. Подвесные канатные дороги и кабельные краны. М.-Л.: Машиностроение, 1966. 484 с.
7. Pestal E. Seilbahnen und Seilkrane in Holz und Materialtransport. Wien: Fromme, 1961.
8. Walker S.C. Mine Winding and Transport. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1988. 546 p.

### References

1. Stepchenko T.A., Babich O.V. Results of scientific research of Bryansk State University in the sphere of mobile transportation and handling rope systems and ropeways. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2021, No.1, pp. 9-29. DOI: 10.22281/2413-9920-2021-07-01-09-29. (In Russian)
2. Korotkiy A.A., Lagerev A.V., Meskhi B.Ch., Lagerev I.A., Panfilov A.V., Tarichko V.I. *Transportno-logisticheskie tekhnologii i mashiny dlya tsifrovoy urbanizirovannoy sredy* [Transport and logistics technologies and machines for the digital urban environment]. Rostov-on-Don, Don State Technical University, 2019. 268 p. DOI: <http://doi.org/10.5281/zenodo.3551132> (In Russian)
3. Lagerev A.V., Lagerev I.A., Tarichko V.I. *Modelirovanie rabochikh protsessov mobilnykh transportno-peregruzochnykh kanatnykh kompleksov* [Modeling of working processes of mobile transporting and overloading rope facilities]. Bryansk, RISO BGU, 2021. 204 p. DOI: 10.5281/zenodo.6044972. (In Russian)
4. Stepchenko T.A., Babich O.V. The results of Bryansk State University scientific research in 2022 in the field of creation of mobile ropeways and forest rope units based on self-propelled wheeled chassis. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2023, No.1, pp. 9-27. DOI: 10.22281/2413-9920-2023-09-01-09-27. (In Russian)
5. *Voprosy teorii i rascheta podemno-transportnykh mashin* [Questions of theory and calculation of lifting and transport machines]. Dukelskiy A.I. (Ed). Moscow-Leningrad, Mashgiz, 1957. 181 p. (In Russian)

9. Guštinčić J., Raffi L.M.G. Analysis of oscillations in a cableway: wind load effects // *Modeling in Science Education and Learning*. 2013. № 6. P. 145-155.
10. MacDonald J.H.G. Multi-modal vibration amplitudes of taut inclined cables due to direct and/or parametric excitation // *Journal of Sound and Vibration*. 2016. Vol. 363. P. 473–494. DOI: 10.1016/j.jsv.2015.11.012
11. Knawa-Hawryszków M., Prokopowicz D., Bryja D. Multipurpose nonlinear cable model for dynamic response of structures under moving load // *Computers and Structures*. 2021. №257. P. 106642.
12. Findeis R. *Rechnerische Grundlagen des Baues von Drahtseilbahnen*. Wien und Leipzig: Franz Deuticke, 1923. 148 p.
13. Czitary E. *Seilschwebbahnen*. Wien: Springer-Verlag, 1962. 475 p.
14. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Шнейдерович Р.М. Расчет на прочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1966. 616 с.
15. Alamoreanu M., Vasilescu A. Study of gravitational displacements of a mobile load on ropeway cable // *Acta Technica Napocensis. Series: Applied Mathematics, Mechanics, and Engineering*. 2017. Vol. 60. № 4.
16. Schell W. *Theorie der Bewegung und der Kräfte*. Band II. 3. Theorie der Kräfte u. ihrer Aequivalenz (Dynamik im weiteren Sinne einsch. Statik). 4. Theorie der durch Kräfte erzeugten Bewegung (Kinetik od. Dynamik). Leipzig: Teubner B.C. 1880. 618 s.
17. Szabo I. *Geschichte der mechanischen Prinzipien*. Basel: Verlag Birkhauser, 1987. 202 s.
18. Thaler H., Wenin M., Brunner J., Reiterer D., Bertotti M.L., Modanese G., Oberhuber E. Numerical optimization in cable railway planning // 9th International Conference on Advanced Computational Engineering and Experimenting, Munich, Germany, 29 June – 02 July 2015.
19. Thaler H., Wenin M., Brunner J., Reiterer D., Bertotti M.L., Modanese G., Oberhuber E. Numerical optimization in cable railway planning // *Properties and Characterization of Modern Materials. Advanced Structured Materials*. Springer. 2017. Vol. 33. P. 113-124.
6. Dukelskiy A.I. *Podvesnye kanatnye dorogi i kabelnye krany* [Overhead cableways and cable cranes]. Moscow-Leningrad, Mashinostroenie, 1966. 484 p. (In Russian)
7. Pestal E. *Seilbahnen und Seilkrane in Holz und Materialtransport*. Wien, Fromme, 1961. (in German)
8. Walker S.C. *Mine Winding and Transport*. Amsterdam, Elsevier Science Publishers B.V., 1988. 546 p.
9. Guštinčić J., Raffi L.M.G. Analysis of oscillations in a cableway: wind load effects. *Modeling in Science Education and Learning*, 2013, No. 6, pp. 145-155.
10. MacDonald J.H.G. Multi-modal vibration amplitudes of taut inclined cables due to direct and/or parametric excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, Vol. 363, pp. 473–494. DOI: 10.1016/j.jsv.2015.11.012
11. Knawa-Hawryszków M., Prokopowicz D., Bryja D. Multipurpose nonlinear cable model for dynamic response of structures under moving load. // *Computers and Structures*, 2021, No. 257, pp. 106642.
12. Findeis R. *Rechnerische Grundlagen des Baues von Drahtseilbahnen*. Wien und Leipzig, Franz Deuticke, 1923. 148 p.
13. Czitary E. *Seilschwebbahnen*. Wien, Springer-Verlag, 1962. 475 p. (in German)
14. Birger I.A., Shorr B.F., Shneyderovich R.M. *Raschet na prochnost detaley mashin* [Strength calculation of machine parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1966. 616 p. (In Russian)
15. Alamoreanu M., Vasilescu A. Study of gravitational displacements of a mobile load on ropeway cable. *Acta Technica Napocensis. Series: Applied Mathematics, Mechanics, and Engineering*, 2017, Vol. 60, No. 4.
16. Schell W. *Theorie der Bewegung und der Kräfte*. Band II. 3. Theorie der Kräfte u. ihrer Aequivalenz (Dynamik im weiteren Sinne einsch. Statik). 4. Theorie der durch Kräfte erzeugten Bewegung (Kinetik od. Dynamik). Leipzig, Teubner B.C. 1880. 618 s. (in German)
17. Szabo I. *Geschichte der mechanischen Prinzipien*. Basel, Verlag Birkhauser, 1987. 202 s. (in German)
18. Thaler H., Wenin M., Brunner J., Reiterer D., Bertotti M.L., Modanese G.,

DOI: 10.1007/978-981-10-1602-8\_10

20. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1980. 974 с.

21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VII. Теория упругости. М.: Физматлит, 2003. 264 с.

22. Sofi A. Nonlinear in-plane vibrations of inclined cables carrying moving oscillators // *Journal of Sound and Vibration*. 2013. № 332. P. 1712–1724. DOI: 10.1016/j.jsv.2012.11.012

23. Qin J., Qiao L., Chen J., Wan J., Jiang M., Hu Ch. Analysis of the Working Cable System of Single-span Circulating Ropeway // *MATEC Web of Conferences*. 2017. Vol. 136. P. 02003.

DOI: 10.1051/mateconf/201713602003

24. Jovic T., Vladic J., Dokic R. Zipline mathematical model forming, experimental verification and analysis of influential parameters // *Archive of Applied Mechanics*. 2023. DOI: 10.1007/s00419-023-02487-0

25. Bont L., Heinimann H.R. Optimum geometric layout of a single cable road // *European Journal Forest Research*. 2012. Vol. 131. P. 1439–1448. DOI 10.1007/s10342-012-0612-y

26. Лагерев А.В., Лагерев И.А. Оптимальное проектирование линии канатного метро // *Вестник Брянского государственного университета*. 2015. № 2. С. 406-415. DOI: 10.5281/zenodo.1302241

27. Lagerev A.V., Lagerev I.A. Design of Passenger Aerial Ropeway for Urban Environment // *Urban Rail Transit*. 2019. Vol. 5. №1. P. 17-28. DOI: 10.1007/s40864-018-0099-z

28. Лагерев А.В., Лагерев И.А. Оптимальное проектирование линии канатного метро с унифицированными промежуточными опорами // *Научно-технический вестник Брянского государственного университета*. 2017. №4. С. 400-414. DOI: 10.22281/2413-9920-2017-03-04-400-414

29. Lagerev A.V., Lagerev I.A. Designing supporting structures of passenger ropeways of minimum cost based on modular intermediate towers of discretely variable height // *Urban Rail Transit*. 2020. Vol. 6. № 4. P. 265-277. DOI: 10.1007/s40864-020-00137-0

Oberhuber E. Numerical optimization in cable railway planning. In: 9th International Conference on Advanced Computational Engineering and Experimenting, Munich, Germany, 29 June – 02 July 2015.

19. Thaler H., Wenin M., Brunner J., Reiterer D., Bertotti M.L., Modanese G., Oberhuber E. Numerical optimization in cable railway planning. In: *Properties and Characterization of Modern Materials. Advanced Structured Materials*. Springer. 2017. Vol. 33. P. 113-124. DOI: 10.1007/978-981-10-1602-8\_10

20. Bronshteyn I.N., Semendyaev K.A. *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchshchikhsya vtuzov* [Handbook of mathematics for engineers and students of technical schools]. Moscow, Nauka, 1980. 976 p. (In Russian)

21. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika. V 10 t. T. VII. Teoriya uprugosti* [Theoretical physics. In 10 vol. Vol. VII. Theory of elasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2003. 264 p. (In Russian)

22. Sofi A. Nonlinear in-plane vibrations of inclined cables carrying moving oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, No. 332, pp. 1712–1724. DOI: 10.1016/j.jsv.2012.11.012

23. Qin J., Qiao L., Chen J., Wan J., Jiang M., Hu Ch. Analysis of the Working Cable System of Single-span Circulating Ropeway. In: *MATEC Web of Conferences*, 2017, Vol. 136, pp. 02003.

DOI: 10.1051/mateconf/201713602003

24. Jovic T., Vladic J., Dokic R. Zipline mathematical model forming, experimental verification and analysis of influential parameters. *Archive of Applied Mechanics*, 2023. DOI: 10.1007/s00419-023-02487-0

25. Bont L., Heinimann H.R. Optimum geometric layout of a single cable road. *European Journal Forest Research*, 2012, Vol. 131, pp. 1439–1448. DOI 10.1007/s10342-012-0612-y

26. Lagerev A.V., Lagerev I.A. Optimal design of the cable car line. *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2015, No. 2, pp. 406-415.

DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.1302241> (In Russian)

30. Лагерев А.В., Лагерев И.А., Таричко В.И. Конструкции и основы проектирования мобильных транспортно-перегрузочных канатных комплексов. Брянск: РИСО БГУ, 2020. 207 с.
31. Лагерев А.В., Лагерев И.А., Таричко В.И. Надежность и безопасность эксплуатации мобильных транспортно-перегрузочных канатных комплексов. Брянск: РИСО БГУ, 2022. 207 с.
32. Короткий А.А., Лагерев А.В., Месхи Б.Ч., Лагерев И.А., Панфилов А.В. Развитие транспортной инфраструктуры крупных городов и территорий на основе технологии канатного метро. Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2017. 344 с. DOI: 10.5281/zenodo.1311913.
33. Лагерев А.В. Нагруженность подъемно-транспортной техники. Брянск: Изд-во БГТУ, 2010. 180 с.
34. СНИП 23-01-99. Строительная климатология. Введ. 2000-01-01. М.: Госстандарт: Изд-во стандартов, 2000. 68 с.
35. Зенков Р.Л., Ивашков И.И., Колобов Л.Н. Машины непрерывного транспорта. М.: Машиностроение, 1987. 432 с.
36. Галкин В.И., Дмитриев В.Г., Дьяченко В.П., Запенин И.В., Шешко Е.Е. Современная теория ленточных конвейеров горных предприятий. М.: МГГУ, 2005. 543 с.
37. Лагерев А.В., Толкачев Е.Н. Математическая модель конвейера с подвесной лентой, распределенным приводом и вертикально замкнутой трассой // Вестник БГТУ. 2014. № 3. С. 44-52. DOI: 10.5281/zenodo.1302231
38. Красников В.В., Дубинин В.Ф., Акимов В.Ф., Волков Ю.И., Криловецкий В.В., Кунц Д.А., Юдаев Н.В. Подъемно-транспортные машины. М.: Агропромиздат, 1987. 272 с.
39. Лагерев А.В., Лагерев И.А., Таричко В.И. Определение усилий натяжения канатов при эксплуатации мобильных транспортно-перегрузочных канатных комплексов // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. 2022. № 3. С. 194-210. DOI: 10.22281/2413-9920-2022-08-03-194-210
40. Диагностирование грузоподъемных машин / Под ред. В.И. Сероштана, Ю.С.
27. Lagerev A.V., Lagerev I.A. Design of Passenger Aerial Ropeway for Urban Environment. *Urban Rail Transit*, 2019, Vol. 5, No. 1, pp. 17-28. DOI: 10.1007/s40864-018-0099-z
28. Lagerev A.V., Lagerev I.A. Optimal design of the cable metro with unified intermediate supports. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2017, No.4, pp. 400-414. DOI: 10.22281/2413-9920-2017-03-04-400-414. (In Russian)
29. Lagerev A.V., Lagerev I.A. Designing supporting structures of passenger ropeways of minimum cost based on modular intermediate towers of discretely variable height. *Urban Rail Transit*, 2020, Vol. 6, No. 4, pp. 265-277. DOI: 10.1007/s40864-020-00137-0
30. Lagerev A.V., Lagerev I.A., Tarichko V.I. *Konstruksii i osnovy proektirovaniya mobilnykh transportno-peregruzochnykh kanatnykh kompleksov* [Structures and design fundamentals of mobile transporting and overloading rope facilities]. Bryansk, RISO BGU, 2020. 207 p. (In Russian)
31. Lagerev A.V., Lagerev I.A., Tarichko V.I. *Nadezhnost i bezopasnost ekspluatatsii mobilnykh transportno-peregruzochnykh kanatnykh kompleksov* [Reliability and safety of operation of mobile transport and overloading rope complexes]. Bryansk, RISO BGU, 2022. 207 p. (In Russian)
32. Korotkiy A.A., Lagerev A.V., Meskhi B.Ch., Lagerev I.A., Panfilov A.V. *Razvitie transportnoy infrastruktury krupnykh gorodov i territoriy na osnove tekhnologii kanatnogo metro* [The development of transport infrastructure of large cities and territories on the basis of technology of passenger ropeways]. Rostov-na-Donu, DGTU, 2017. 344 p. ISBN 978-5-7890-1378-6 DOI: 10.5281/zenodo.1311913 (In Russian)
33. Лагерев А.В. *Lagerev A.V. Nagruzhennost podemno-transportnoy tekhniki* [Load lifting and transport equipment]. Bryansk, BGTU, 2010. 180 p. ISBN 978-5-89838-497-5 DOI: 10.5281/zenodo.1306614 (In Russian)
34. *SNiP 23-01-99. Stroitel'naya klimatologiya* [Building climatology]. Moscow, Gosstandart, 2003. 68 p. (In Russian)

