

УДК (UDC) 621.877.3

АНАЛИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВИБРОЗАЩИТНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕЛОВЕКА-ОПЕРАТОРА

ANALYTICAL ANALYSIS OF THE VIBRATION PROTECTION SYSTEM OF A HUMAN OPERATOR

Корытов М.С., Щербаков В.С., Кашапова И.Е.
Korytov M.S., Sherbakov V.S., Kashapova I.E.¹ – Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет (Омск, Россия)
¹ – Siberian State Automobile and Highway University (Omsk, Russian Federation)

Аннотация. Задача математического описания и исследования систем виброизоляции сидений операторов мобильных машин актуальна, поскольку операторы многих строительных, дорожных и других мобильных машин подвергаются существенным вибрационным воздействиям. Было предложено оригинальное аналитическое решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний линейного осциллятора с кинематическим возбуждением, описывающего вертикальные колебания сиденья с оператором, при заданных синусоидальных колебаниях основания сиденья. Аналитическое дифференцирование по времени выражения абсолютного перемещения виброзащищаемой массы сиденья с оператором позволило получить аналитическое выражение абсолютной скорости массы, упрощение которого позволило получить компактное выражение первой, а затем нулевой производной абсолютной координаты в установившемся режиме колебаний. Из выражения абсолютного перемещения виброзащищаемой массы с использованием тригонометрического преобразования было получено аналитическое выражение его амплитуды, из которого, в свою очередь, было получено аналитическое выражение коэффициента передачи виброзащитной системы. Уравнение на основе аналитического выражения производной коэффициента передачи по круговой частоте было решено аналитически, что позволило получить аналитические выражения резонансных амплитуд абсолютных перемещений и коэффициента передачи. Приведены примеры функциональных зависимостей, полученных при использовании выведенных аналитических выражений. Полученные аналитические выражения позволяют проводить исследования виброзащитных систем сидений с максимальной точностью.

Ключевые слова: вибрации, виброзащита, кинематическое возбуждение.

Дата принятия к публикации: 24.03.2023
Дата публикации: 25.06.2023

Сведения об авторах:

Корытов Михаил Сергеевич – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Автомобильный транспорт», ФГБОУ ВО «Сибирский госу-

Abstract. The task of mathematical description and study of vibration isolation systems for seats of mobile machine operators is relevant, since operators of many construction, road and other mobile machines are exposed to significant vibration effects. An original analytical solution was proposed for the differential equation of forced oscillations of a linear oscillator with kinematic excitation, which describes the vertical oscillations of the seat with the operator, for given sinusoidal oscillations of the seat base. Analytical differentiation in time of the expression for the absolute displacement of the vibration-protected mass of the seat with the operator made it possible to obtain an analytical expression for the absolute velocity of the mass, the simplification of which made it possible to obtain a compact expression for the first and then the zero derivative of the absolute coordinate in the steady state oscillation mode. From the expression for the absolute displacement of the vibration-protected mass using a trigonometric transformation, an analytical expression for its amplitude was obtained, from which, in turn, an analytical expression for the transmission coefficient of the vibration protection system was obtained. The equation based on the analytical expression of the derivative of the transfer coefficient with respect to the circular frequency was solved analytically, which made it possible to obtain analytical expressions for the resonant amplitude of absolute displacements and the transfer coefficient. Examples of functional dependencies obtained using the derived analytical expressions are given. The obtained analytical expressions make it possible to conduct studies of vibration protection systems of seats with maximum accuracy.

Keywords: vibrations, vibration protection, kinematic excitation.

Date of acceptance for publication: 24.03.2023
Date of publication: 25.06.2023

Authors' information:

Mikhail S. Korytov – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of Department of Automobile transport at Siberian State-Impact Auto-

дарственный автомобильно-дорожный университет (СибАДИ)», *e-mail: kms142@mail.ru.*

ORCID: 0000-0002-5104-7568

Щербakov Виталий Сергеевич – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Автоматизация и энергетическое машиностроение», ФГБОУ ВО «Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет (СибАДИ)», *e-mail: sherbakov_vs@sibadi.org.*

ORCID: 0000-0002-3084-2271

Кашапова Ирина Евгеньевна – аспирант кафедры «Автоматизация и энергетическое машиностроение» ФГБОУ ВО «Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет (СибАДИ)», *e-mail: iriska-97-17-13@mail.ru.*

ORCID: 0000-0002-0631-564X

mobile and Road University (SibADI), *e-mail: kms142@mail.ru.*

ORCID: 0000-0002-5104-7568

Vitaliy S. Sherbakov - Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of Department of Automation and power engineering at Siberian State-Impact Automobile and Road University (SibADI), *e-mail: sherbakov_vs@sibadi.org.*

ORCID: 0000-0002-3084-2271

Irina E. Kashapova – postgraduate, Department of Automation and power engineering at Siberian State-Impact Automobile and Road University (SibADI), *e-mail: iriska-97-17-13@mail.ru.*

ORCID: 0000-0002-0631-564X

1. Введение

Проблема виброизоляции весьма актуальна для операторов всех мобильных машин [1]. В наибольшей степени низкочастотным и высокочастотным вибрационным воздействиям подвержены операторы таких строительных, дорожных и подъемно-транспортных машин, как гидравлические экскаваторы [2], фронтальные погрузчики [3], автогрейдеры [4], дорожные катки [5], бетоносмесители [6], виброплиты [7], бульдозеры [8], дорожные фрезы [9], гидромолоты [10].

Не менее тяжелые условия работы в плане вибраций у операторов горных машин [11], проходческих комбайнов [12] многих видов сельскохозяйственной техники [13], лесопогрузчиков [14].

При решении задач виброзащиты операторов перечисленных машин, можно выделить два основных варианта используемых конструктивных решений: это применение виброизоляторов кабины оператора [15] и сиденья оператора [16]. Совместное применение обоих вариантов увеличивает эффективность виброзащиты. Виброзащитные системы сидений операторов позволяют выполнять защиту не только от высокочастотных, но и от низкочастотных вибраций сравнительно большой амплитуды, и являются одним из наиболее важных элементов виброзащиты.

Активные виброзащитные системы [17], широко применяемые для виброзащиты объектов производственного оборудования [18],

для сидений операторов мобильных машин применяются сравнительно редко, ввиду их относительно большой сложности и стоимости, в том числе из-за наличия в них таких элементов, как резинокордные пневматические оболочки [19], необходимости применения электротехнических элементов и т.д.

Рассмотрим аналитическое математическое описание пассивной виброзащитной системы от имеющих наибольшую амплитуду и оказывающих наиболее негативное влияние на оператора вертикальных перемещений сиденья оператора. Система сиденья с оператором представлена при этом в виде массы с одной поступательной степенью свободы [20].

2. Постановка задачи

Для математического описания пассивной виброзащитной системы, использовалась расчетная схема с кинематическим возбуждением перемещений основания сиденья (рис. 1). В подобной системе в виде временной зависимости задается перемещение основания виброзащитной системы (т.е., основания сиденья) в неподвижной системе координат.

При описании виброзащитной системы сиденья оператора мобильной строительной или дорожной машины, имеющие место перемещения основания сиденья практически не зависят от виброзащищаемой массы (масса базовой машины многократно превосходит массу сиденья с оператором), по этой

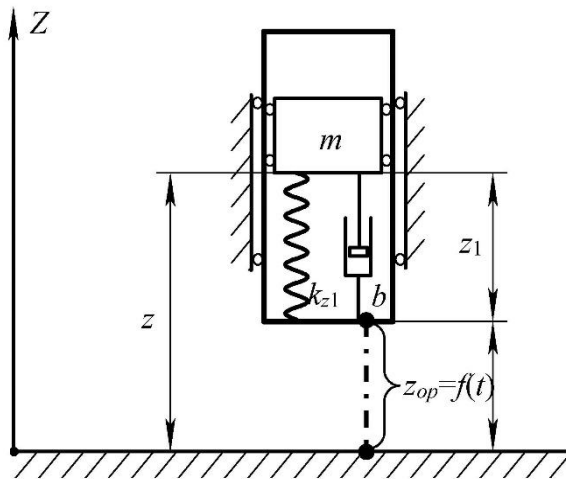


Рис. 1. Расчетная схема виброзащитной системы с одной степенью свободы в виде линейного осциллятора с кинематическим возбуждением

причине использовалась модель с кинематическим возбуждением.

Рассматривались гармонические (синусоидальные) внешние воздействия на систему, которые являются одним из самых распространенных воздействий на виброзащищаемый объект, и приняты во всем мире в качестве стандарта исследуемых воздействий [21].

Для исследования модели линейного осциллятора с кинематическим возбуждением применяются методы численного решения дифференциальных уравнений, точность которых зачастую нестабильна, а вычислительный процесс получения решения – относительно ресурсоемкий и долгий [22].

Целесообразно получить аналитическое описание модели с кинематическим возбуждением и решение задачи динамики для нее, по возможности, также в аналитическом виде. Это позволит более точно и быстро определять значения коэффициента передачи при виброизоляции сиденья с оператором, определять значения амплитуд при различных частотах, а также исследовать влияние характеристик виброзащитной системы на виброизолирующие свойства.

$$m \cdot \ddot{z} + b \cdot (\dot{z} - \dot{z}_{op}) + k_{z1} \cdot (z - z_{op}) = m \cdot \ddot{z} + b \cdot (\dot{z} - A_{mp} \cdot w \cdot \cos(t \cdot w)) + k_{z1} \cdot (z - A_{mp} \cdot \sin(t \cdot w)) = 0. \quad (3)$$

Разрешенное относительно старшей производной \ddot{z} , уравнение (3) принимает вид:

3. Вывод аналитических зависимостей

На рис. 1 и при последующем выводе формул приняты следующие обозначения: m – масса виброзащищаемого объекта (сиденья с оператором); z – вертикальная координата виброзащищаемого объекта в неподвижной системе координат; z_1 – локальная вертикальная координата виброзащищаемого объекта на подвижном основании, относительно этого основания (что соответствует деформации механизма виброзащитной системы); z_{op} – вертикальная координата основания виброзащищаемого объекта в неподвижной системе координат; b – коэффициент сопротивления демфера (вязкого трения); k_{z1} – коэффициент пропорциональности (упругости) статической силовой характеристики механизма виброзащитной системы.

Гармонические синусоидальные воздействия характеризовались следующими параметрами: F_A – амплитуда силового воздействия; A_{mp} – амплитуда кинематического воздействия; T_o – период внешнего воздействия; w – угловая (круговая) частота внешнего воздействия. Символ t использовался для обозначения времени.

Дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания модели гармонического осциллятора с кинематическим возбуждением, имеет общий вид [22]

$$m \cdot \ddot{z} + b \cdot \dot{z}_1 + k_{z1} \cdot z_1 = 0. \quad (1)$$

Дальнейшие выкладки приведены для исходного дифференциального уравнения (1) при нулевых начальных значениях абсолютной координаты и скорости массы.

Учитывая, что гармоническое кинематическое возбуждение описывается временной зависимостью координаты основания сиденья

$$z_{op} = A_{mp} \cdot \sin(t \cdot w), \quad (2)$$

а также с учетом соотношения $z_1 = z - z_{op}$ (рис. 1), дифференциальное уравнение (1) принимает вид:

$$\ddot{z} = -\frac{b(\dot{z} - A_{mp} w \cos(tw)) + k_{z1}(z - A_{mp} \sin(tw))}{m}. \quad (4)$$

Аналитическое решение дифференциально-го уравнения (4), полученное при помощи инструментов символьных вычислений в среде

$$z(t) = e^{-\sigma_{21}} \left(\frac{e^{\sigma_{21}} \sin(tw)(\sigma_{14} - \sigma_1 + \sigma_{13} - \sigma_{12})}{\sigma_{25} \sigma_{24} \sqrt{\sigma_{29}}} - \frac{A_{mp} m w e^{\sigma_{21}} \cos(tw)(b\sqrt{\sigma_{29}} - 2k_{z1} m + b^2)}{\sigma_{24} \sqrt{\sigma_{29}}} \right) - e^{-\sigma_{20}} \left(\frac{e^{\sigma_{20}} \sin(tw)(\sigma_{14} - \sigma_1 - \sigma_{13} + \sigma_{12})}{\sigma_{26} \sigma_{23} \sqrt{\sigma_{29}}} + \frac{A_{mp} m w e^{\sigma_{20}} \cos(tw)(2k_{z1} m + b\sqrt{\sigma_{29}} - b^2)}{\sigma_{23} \sqrt{\sigma_{29}}} \right) + \frac{2A_{mp} m^3 w e^{-\sigma_{21}} (\sigma_9 - \sigma_8 - \sigma_{11} + \sigma_{22} - \sigma_7 + \sigma_6 + \sigma_5 - \sigma_4 + \sigma_{19} + \sigma_3 - \sigma_{16} - \sigma_2 - \sigma_{18} + \sigma_{17} + \sigma_{15})}{\sigma_{10}} + \frac{2A_{mp} m^3 w e^{-\sigma_{20}} (\sigma_8 - \sigma_9 - \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_7 - \sigma_6 - \sigma_5 + \sigma_4 + \sigma_{19} - \sigma_3 - \sigma_{16} + \sigma_2 - \sigma_{18} + \sigma_{17} + \sigma_{15})}{\sigma_{10}}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2A_{mp} b m^2 (3k_{z1}^2 + 3k_{z1} m w^2 + 2m^2 w^4); \\ \sigma_2 &= 4b^2 k_{z1}^2 m^2 w^2; \sigma_3 = 16b^2 k_{z1} m^3 w^4; \\ \sigma_4 &= 8k_{z1}^2 m^4 w^4; \sigma_5 = 8k_{z1}^3 m^3 w^2; \\ \sigma_6 &= 4b^2 m^4 w^6; \sigma_7 = 4b^4 m^2 w^4; \\ \sigma_8 &= 8k_{z1} m^5 w^6; \sigma_9 = 8k_{z1}^4 m^2; \\ \sigma_{10} &= \sigma_{26} \sigma_{25} \sigma_{24} \sigma_{23} \sqrt{\sigma_{29}}; \sigma_{11} = b^3 w^2 \sigma_{29}^{3/2}; \\ \sigma_{12} &= 2A_{mp} k_{z1} m^2 \sigma_{27} \sqrt{\sigma_{29}}; \\ \sigma_{13} &= 2A_{mp} b^2 m \sigma_{27} \sqrt{\sigma_{29}}; \\ \sigma_{14} &= 2A_{mp} b^3 m \sigma_{27}; \sigma_{15} = 4b k_{z1}^2 m^2 w^2 \sqrt{\sigma_{29}}; \\ \sigma_{16} &= 4b^3 m^2 w^4 \sqrt{\sigma_{29}}; \sigma_{17} = 8b k_{z1} m^3 w^4 \sqrt{\sigma_{29}}; \\ \sigma_{18} &= 4b^3 k_{z1} m w^2 \sqrt{\sigma_{29}}; \sigma_{19} = 4b m^4 w^6 \sqrt{\sigma_{29}}; \\ \sigma_{20} &= \frac{t(b - \sqrt{\sigma_{29}})}{2m}; \\ \sigma_{21} &= \frac{t(b + \sqrt{\sigma_{29}})}{2m}; \sigma_{22} = b^5 w^2 \sqrt{\sigma_{29}}; \quad (6) \\ \sigma_{23} &= \sigma_{28} - 2k_{z1} m - b\sqrt{\sigma_{29}} + b^2; \\ \sigma_{24} &= \sigma_{28} - 2k_{z1} m + b\sqrt{\sigma_{29}} + b^2; \\ \sigma_{25} &= \sigma_{28} + 2k_{z1} m - b\sqrt{\sigma_{29}} - b^2; \\ \sigma_{26} &= \sigma_{28} + 2k_{z1} m + b\sqrt{\sigma_{29}} - b^2; \end{aligned}$$

MATLAB, при начальных условиях $z(0) = 0$; $\dot{z}(0) = 0$ после упрощения имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{27} &= m w^2 + k_{z1}; \sigma_{28} = 2m^2 w^2; \\ \sigma_{29} &= b^2 - 4k_{z1} m. \end{aligned}$$

Дифференцирование выражения (5) по времени позволило получить аналитическое выражение скорости $\dot{z}(t)$ изменения абсолютной координаты виброзащищаемой массы в неподвижной системе координат, которое не приводится здесь ввиду его громоздкости.

В указанном выражении, в отдельных слагаемых присутствуют множители вида

$$e^{-\left(\frac{t(b + \sqrt{b^2 - 4k_{z1} m})}{2m} \right)}, \quad (7)$$

обращающиеся в 0 при $t \rightarrow \infty$.

Подстановка вместо указанных множителей нулей в аналитическое выражение $\dot{z}(t)$ и последующее упрощение последнего, позволили получить достаточно компактное выражение первой производной координаты в установившемся режиме колебаний:

$$\dot{z}(t) = \frac{A_{mp} w (k_{z1}^2 \cos(t w) + b^2 w^2 \cos(t w) - k_{z1} m w^2 \cos(t w) + b m w^3 \sin(t w))}{b^2 w^2 + k_{z1}^2 - 2 k_{z1} m w^2 + m^2 w^4}. \quad (8)$$

Интегрирование выражения скорости (8) по времени позволило получить компактное выражение перемещения $z(t)$:

$$z(t) = - \frac{A_{mp} (b m w^3 - k_{z1}^2 \sin(t w) - b^2 w^2 \sin(t w) + b m w^3 \cos(t w) + k_{z1} m w^2 \sin(t w))}{b^2 w^2 + k_{z1}^2 - 2 k_{z1} m w^2 + m^2 w^4} + C, \quad (9)$$

где C – постоянная интегрирования:

$$C = \frac{A_{mp} b m w^3}{b^2 w^2 + k_{z1}^2 - 2 k_{z1} m w^2 + m^2 w^4}. \quad (10)$$

$$z(t) = \frac{A_{mp} (k_{z1}^2 \sin(t w) + b^2 w^2 \sin(t w) - b m w^3 \cos(t w) - k_{z1} m w^2 \sin(t w))}{b^2 w^2 + k_{z1}^2 - 2 k_{z1} m w^2 + m^2 w^4}. \quad (11)$$

Из выражений (11) и (8) могут быть получены аналитические выражения коэффициента передачи (коэффициента динамичности) виброзащитной системы, представляющего собой отношение амплитуды колебаний массы m к амплитуде колебаний основания (либо, что эквивалентно, отношение амплитуд соответствующих скоростей). Для этого, например, из выражения абсолютного перемещения виброзащищаемой массы (11) необходимо предварительно получить аналитическое выражение его амплитуды.

Выражение в скобках в числителе формулы (11) может быть преобразовано с ис-

$$z(t) = - \frac{A_{mp} \sin \left(\arcsin \left(\frac{b m w^3}{\sigma_1} \right) - t w \right) \sqrt{(b^2 w^2 + k_{z1}^2 - m k_{z1} w^2)^2 + b^2 m^2 w^6}}{b^2 w^2 + k_{z1}^2 - 2 k_{z1} m w^2 + m^2 w^4}. \quad (15)$$

Выражение (15) принимает абсолютное максимальное значение при максимальном значении единственной в данной формуле функции синуса:

$$\left[\sin \left(\arcsin \left(\frac{b m w^3}{\sigma_1} \right) - t w \right) \right]_{\max} = 1. \quad (16)$$

При подстановке единицы (16) в (15), и последующем преобразовании, получено известное аналитическое выражение A_z – амплитуды абсолютных перемещений виброзащищаемой массы при вынужденных колебаниях [24]:

пользованием тригонометрического преобразования [23]:

$$A \cdot \sin(\alpha) + B \cdot \cos(\alpha) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(\alpha + \phi), \quad (12)$$

где

$$\phi = \arcsin \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right). \quad (13)$$

Из числителя формулы (11)

$$\alpha = t w; \quad A = b^2 w^2 + k_{z1}^2 - m k_{z1} w^2;$$

$$B = -b m w^3, \quad (14)$$

отсюда выражение (11) может быть преобразовано к виду

$$A_z = \frac{A_{mp} \sqrt{b^2 w^2 + k_{z1}^2}}{\sqrt{b^2 w^2 + k_{z1}^2 - 2 k_{z1} m w^2 + m^2 w^4}}. \quad (17)$$

Из (17) выводится аналитическое выражение коэффициента передачи (коэффициента динамичности) виброзащитной системы:

$$K_d = \frac{A_z}{A_{mp}} = \frac{\sqrt{b^2 w^2 + k_{z1}^2}}{\sqrt{b^2 w^2 + k_{z1}^2 - 2 k_{z1} m w^2 + m^2 w^4}}. \quad (18)$$

Выведенное аналитическое выражение (18) тождественно известному выражению коэффициента передачи, которое одинаково

для систем с силовым и с кинематическим возбуждением колебаний [25]:

$$K_d = \frac{1 + \eta^2}{\sqrt{(1 - \bar{w}^2)^2 + \eta^2}}, \quad (19)$$

где

$$\bar{w} = \frac{w}{w_0} = \frac{w}{\sqrt{\frac{k_{z1}}{m}}}; \quad \eta = \frac{w \cdot b}{k_{z1}}. \quad (20)$$

При подстановке (20) в (19) получаем известную формулу в развернутом виде:

$$K_d = \frac{\frac{b^2 \cdot w^2}{k_{z1}^2} + 1}{\sqrt{\left(\frac{m \cdot w^2}{k_{z1}} - 1\right)^2 + \frac{b^2 \cdot w^2}{k_{z1}^2}}}. \quad (21)$$

При сравнении выведенного выражения коэффициента передачи (18) с известным (21) видно, что последнее может быть получено из (18) путем умножения на дробь $\frac{k_{z1}}{k_{z1}}$,

которая при переносе под знак квадратного корня принимает вид $\frac{k_{z1}^2}{k_{z1}^2}$. Вычисляемые по формулам (18) и (21) значения коэффициен-

$$\frac{dK_d}{dw} = \frac{b^2 w}{\sqrt{b^2 w^2 + k_{z1}^2} \sqrt{\sigma_1}} - \frac{\sqrt{b^2 w^2 + k_{z1}^2} (2b^2 w + 4m^2 w^3 - 4k_{z1} m w)}{2\sigma_1^{3/2}}. \quad (22)$$

Уравнение $\frac{dK_d}{dw} = 0$ имеет единственный действительный положительный корень:

$$w_{rez} = \sqrt{\frac{k_{z1}^{3/2} \sqrt{2b^2 + k_{z1} m} - k_{z1}^2 \sqrt{m}}{b^2 \sqrt{m}}}. \quad (23)$$

Амплитуда абсолютных перемещений при резонансе, при подстановке (23) в (17):

$$A_{zrez} = \frac{A_{mp} \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sqrt{m}} + k_{z1}^2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sqrt{m}} + k_{z1}^2 + \frac{m \sigma_1^2}{b^4} - \frac{2k_{z1} \sqrt{m} \sigma_1}{b^2}}}, \quad (24)$$

где

$$\sigma_1 = k_{z1}^{3/2} \sqrt{2b^2 + k_{z1} m} - k_{z1}^2 \sqrt{m}. \quad (25)$$

Коэффициент передачи при резонансе:

та передачи совпадают при любых значениях аргументов.

Из формулы (18) может быть выведено аналитическое выражение резонансной частоты вынужденных колебаний w_{rez} системы с кинематическим возбуждением, которое отличается от аналогичного выражения системы с силовым возбуждением.

Предложенное выражение (18) коэффициента передачи (коэффициента динамичности), если рассматривать его как функцию частоты $K_d = f(w)$, может быть продифференцировано для получения аналитического выражения его производной по w . Тогда приравнивание выражения производной к нулю даст уравнение, действительный положительный корень которого по аргументу w будут соответствовать глобальному максимуму функции $K_d = f(w)$, т.е. искомому резонансу.

Производная коэффициента передачи по частоте w :

$$K_{drez} = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sqrt{m}} + k_{z1}^2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sqrt{m}} + k_{z1}^2 + \frac{m \sigma_1^2}{b^4} - \frac{2k_{z1} \sqrt{m} \sigma_1}{b^2}}}. \quad (26)$$

Практическое значение также имеет задача определения частоты w_k , соответствующей заданному значению коэффициента передачи.

Решение уравнения

$$\frac{A_z}{A_{mp}} = K_{ds} \quad (27)$$

относительно w (K_{ds} – заданное значение коэффициента передачи; вместо A_z в (27) подставляется выражение (17)), имеет вид:

$$w_k = \frac{\sqrt{2 \cdot (b^2 - b^2 K_{ds}^2 + 2 K_{ds}^2 k_{z1} m + \sigma_1)}}{2 K_{ds} m}, \quad (28)$$

$$\text{где } \sigma_1 = \sqrt{b^4 K_{ds}^4 - 2b^4 K_{ds}^2 + b^4 - 4b^2 K_{ds}^4 k_{z1} m + 4b^2 K_{ds}^2 k_{z1} m + 4 K_{ds}^2 k_{z1}^2 m^2}.$$

При частотах, равных или больших w_k , коэффициент передачи K_d будет соответственно равен или меньше K_{ds} .

Локальная координата деформации механизма виброзащитной системы z_1 в установившемся режиме вынужденных колебаний определяется как разность выражений (11) и (2)

$$z_1 = z - z_{op} = \frac{A_{mp} (k_{z1}^2 \sin(t w) + b^2 w^2 \sin(t w) - b m w^3 \cos(t w) - k_{z1} m w^2 \sin(t w))}{b^2 w^2 + k_{z1}^2 - 2k_{z1} m w^2 + m^2 w^4} - A_{mp} \cdot \sin(t \cdot w). \quad (29)$$

Выражение (29) может быть разложено по сомножителям $\sin(t w)$ и $\cos(t w)$, а затем с использованием описанного выше преобразования (12) преобразовано к виду

$$z_1 = -\sin \left(\arcsin \left(\frac{A_{mp} b m w^3}{\sigma_1 \sigma_2} \right) - t w \right) \sigma_1, \quad (30)$$

где

$$\sigma_1 = \sqrt{\left(A_{mp} - \frac{A_{mp} (b^2 w^2 + k_{z1}^2 - m k_{z1} w^2)}{\sigma_2} \right)^2 + \frac{A_{mp}^2 b^2 m^2 w^6}{\sigma_2^2}}; \quad \sigma_2 = b^2 w^2 + k_{z1}^2 - 2k_{z1} m w^2 + m^2 w^4. \quad (31)$$

Абсолютное максимальное значение выражение (30) принимает при замене функции синуса на единицу. Тогда, амплитуда локальной координаты z_1 будет определяться как

$$A_{z1} = \frac{A_{mp} m w^2}{\sqrt{b^2 w^2 + k_{z1}^2 - 2k_{z1} m w^2 + m^2 w^4}}. \quad (32)$$

Из (32) может быть получена формула амплитуды колебаний основания A_{mp1} , вызывающих колебания локальной координаты z_1 с амплитудой A_{z1} :

$$A_{mp1} = \frac{A_{z1} \sqrt{b^2 w^2 + k_{z1}^2 - 2k_{z1} m w^2 + m^2 w^4}}{m w^2}. \quad (33)$$

4. Результаты экспериментов

Все выведенные аналитические выражения прошли верификацию путем сравнения с соответствующими значениями, полученными при решении дифференциального уравнения (4) численным методом.

На рис. 2 приведены в качестве примера некоторые результаты использования полученных аналитических зависимостей в виде графиков. На рис. 2, а показаны полученные при значениях $m=200$ кг; $b=20$ Н/(м/с); $k_{z1}=500$ Н/м; $A_{mp}=0.05$ м; $T_o=1.5$ с временные зависимости перемещения и скорости виброзащитаемой массы, а также перемещения основания в неподвижной системе координат в начальный интервал времени. На рис. 2, б показан временной фрагмент, являющийся продолжением того же процесса, что и на рис. 2, а, но уже начиная с 10000 с времени процесса, т.е. в установившемся режиме колебаний. Зависимости перемещения $z(t)$ на рис. 2, б, полученные по формулам (5) и (11), т.е. по полному решению и компактной формуле для установившегося режима колебаний, визуально совпадают друг с другом, т.е. имеют пренебрежимо малое расхождение.

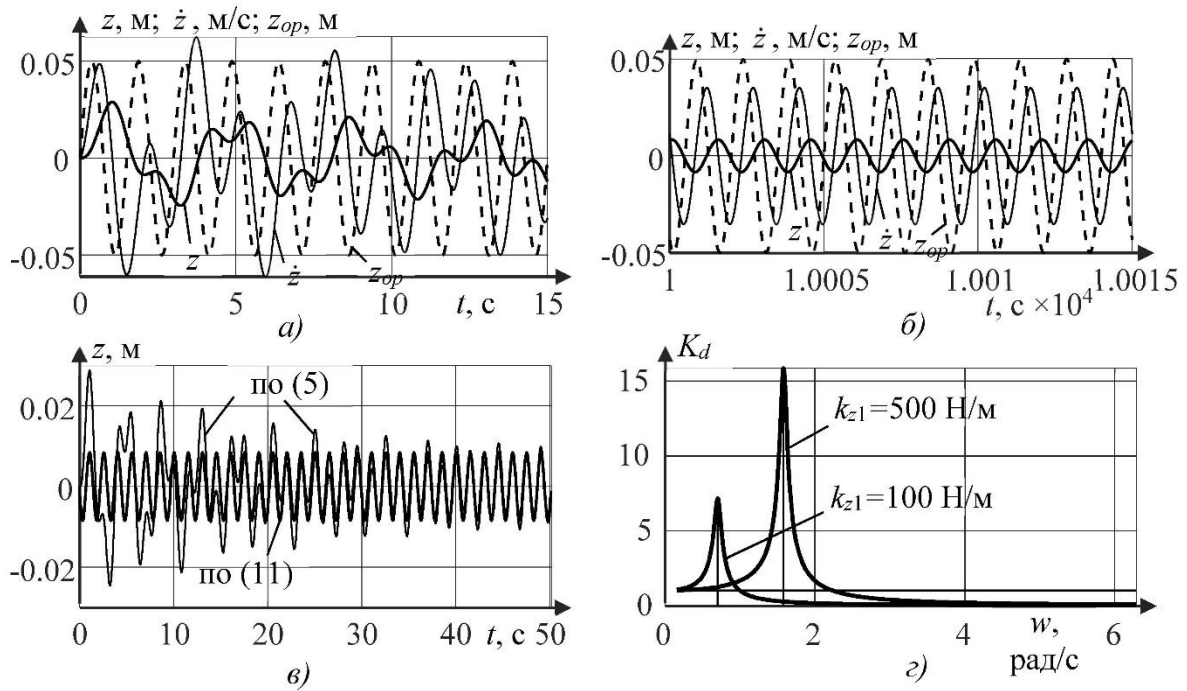


Рис. 2. Зависимости параметров вынужденных колебаний системы с кинематическим возбуждением (примеры): а) начальный интервал времени, временные зависимости; б) установившиеся колебания, временные зависимости; в) сравнение формул полного решения и установившегося движения в начальный интервал времени; г) функциональные зависимости коэффициента передачи от круговой частоты

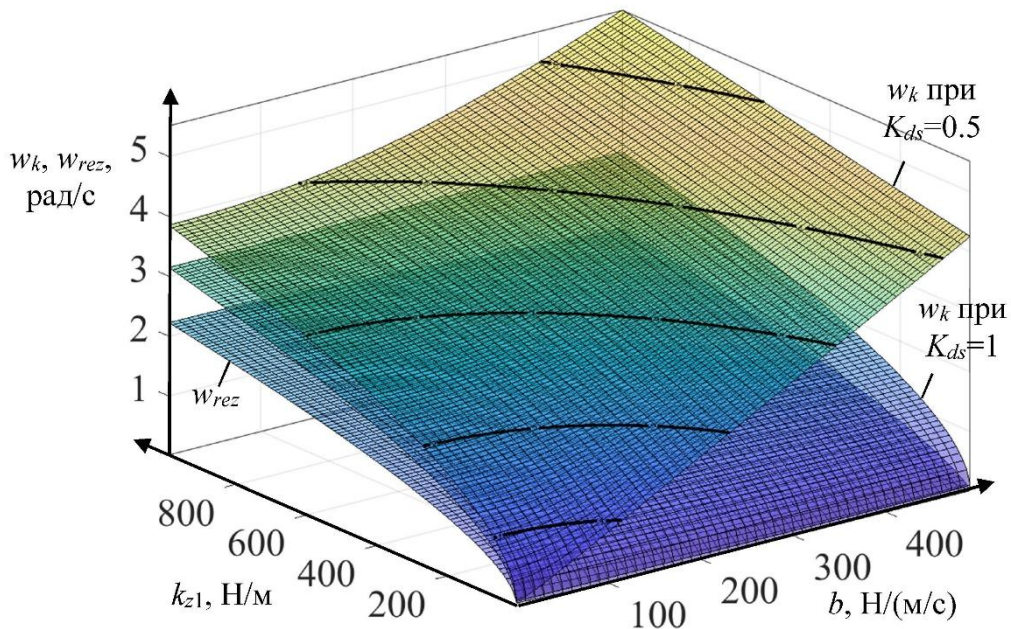


Рис. 3. Зависимости круговых частот w_k и w_{rez} от параметров b и k_{z1} (примеры)

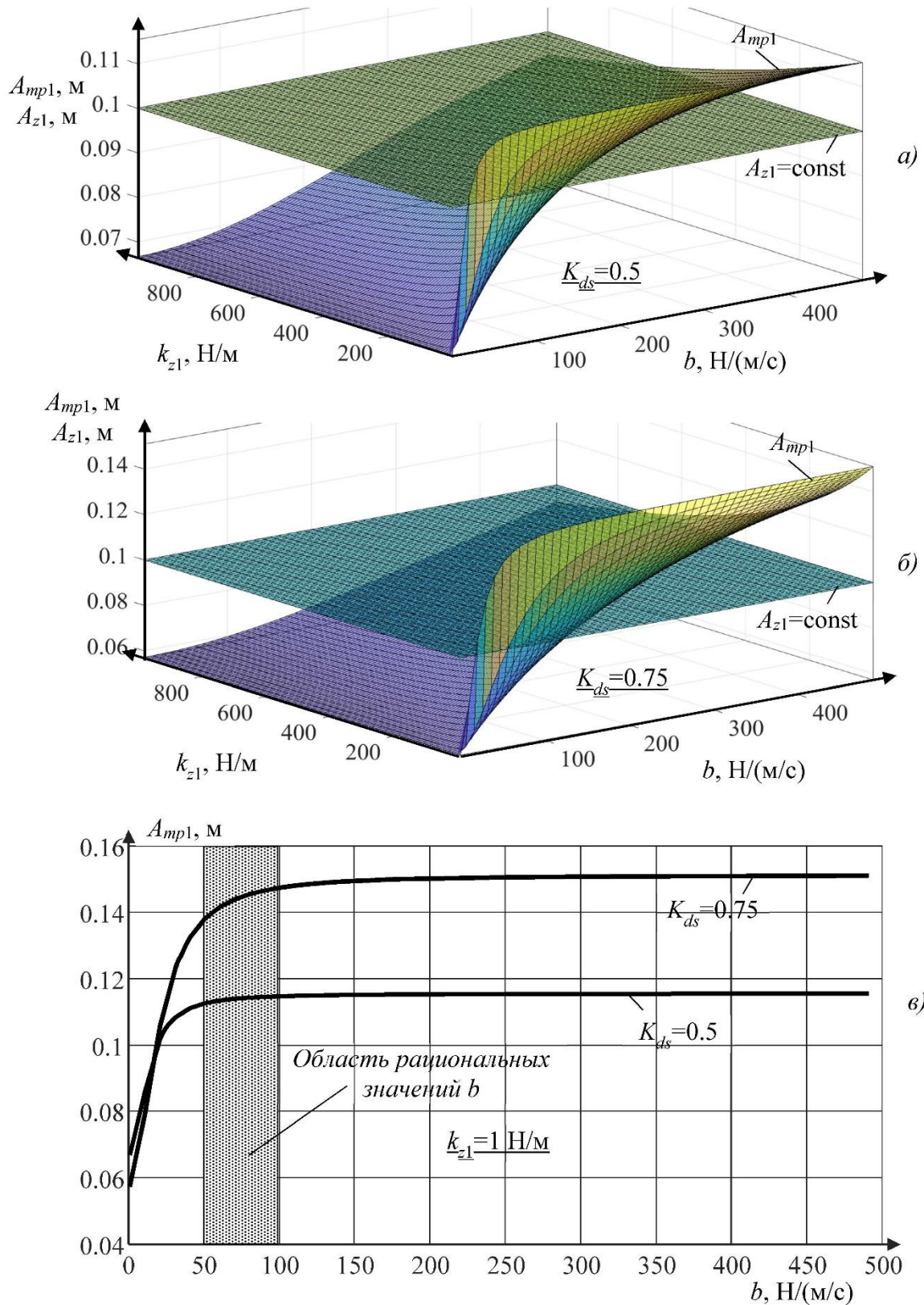


Рис. 4. Зависимости амплитуды колебаний основания $A_{mp1}=f(k_{z1}, b)$, вызывающих колебания локальной координаты z_1 с постоянной амплитудой $A_{z1}=0,1$ м для соответствующих частот w_k : а) для частот w_k , соответствующих $K_{ds}=0.5$; б) для частот w_k , соответствующих $K_{ds}=0.75$; в) графики $A_{mp1}=f(b)$ при $k_{z1}=1$ Н/м (примеры)

На рис. 2, в для тех же исходных данных для сравнения также приведены зависимости перемещения $z(t)$, полученные по формулам (5) и (11), но уже в начальный интервал времени. Видно, что график полной формулы постепенно все больше приближается к графику компактной формулы установившегося движения.

Наконец, на рис. 2, г приведены две функциональные зависимости коэффициента передачи виброзащитной системы от круговой частоты колебаний основания, для того же сочетания значений исходных данных, что приведено выше, и для указанного сочетания при отличающемся значении параметра наклона статической силовой характеристики виброзащитной системы $k_{z1}=100$ Н/м.

Видно, что при уменьшении коэффициента наклона статической силовой характеристики, т.е. при приближении характеристики к квазиулевым, резонансная частота уменьшается, и в пределе стремится к нулю.

На рис. 3 приведены три функциональные зависимости круговых частот w_k и w_{rez} от параметров b и k_{z1} для постоянной массы $m=200$ кг. Параметры b и k_{z1} варьировались в пределах и с шагами $k_{z1}=[1:10:1000]$ Н/м; $b=[1:10:500]$ Н/(м/с).

Верхняя поверхность на рис. 3 – график функции круговой частоты $w_k=f(k_{z1}, b)$ при заданном значении коэффициента передачи $K_{ds}=0.5$. Средняя поверхность – аналогичный график функции круговой частоты $w_k=f(k_{z1}, b)$ при заданном значении коэффициента передачи $K_{ds}=1$. Нижняя поверхность – график функции резонансной частоты $w_{rez}=f(k_{z1}, b)$. Для нижней поверхности коэффициент передачи будет переменным.

На рис. 4 приведены зависимости амплитуды колебаний основания A_{mp1} , вызывающих колебания локальной координаты z_1 с постоянной амплитудой $A_{z1}=0,1$ м (в качестве примера), от k_{z1} и b , причем, при заданных значениях коэффициента передачи системы ($K_{ds}=0.5$ и $K_{ds}=0.75$). Поскольку собственная деформация механизма виброзащитной системы в реальных механизмах всегда ограничена, параметр A_{mp1} целесообразно максимизировать, поскольку это позволяет гасить колебания основания с большей амплитудой,

не выходя за пределы хода механизма $A_{z1}=0,1$ м (т.е. не используя отбойники).

Зависимости на рис. 4 были получены следующим образом. Сначала по (28) определялись матрицы значений w_k (для $K_{ds}=0.5$ и $K_{ds}=0.75$), а затем по этим значениям w_k , используя формулу (33), вычислялись матрицы значений A_{mp1} , приведенные в виде поверхностей на рис. 4 а и 4 б для $K_{ds}=0.5$ и $K_{ds}=0.75$ соответственно.

5. Обсуждение результатов

Анализ графиков на рис. 3 подтверждает данные о том, что виброзащитные системы с большими углами наклона статической силовой характеристики и большим поглощением энергии обеспечивают приемлемый уровень виброизоляции лишь при сравнительно больших частотах колебаний основания. Установлено, что для заданного значения коэффициента передачи $K_{ds}=1$ (когда амплитуды колебаний виброзащитаемой массы и основания равны), соответствующая круговая частота не зависит от значения коэффициента сопротивления b (см. среднюю поверхность на рис. 3). Частоты резонанса всегда ниже, чем частоты, при которых обеспечивается приемлемый уровень виброизоляции.

Наконец, при одновременном стремлении к нулю коэффициента наклона статической характеристики k_{z1} , и коэффициента сопротивления b , как резонансные частоты, так и частоты приемлемого уровня виброизоляции стремятся также к нулю, что теоретически означает максимально эффективную виброизоляцию, причем на любых частотах, как высоких, так и низких.

Анализ приведенных на рис. 4 а и б поверхностей $A_{mp1}=f(k_{z1}, b)$, полученных для $K_{ds}=0.5$, $K_{ds}=0.75$, а также для других значений в диапазоне $0 < K_{ds} < 1$, показал, что наибольшие значения амплитуды колебаний основания A_{mp1} , при которых амплитуда локальной координаты z_1 находится на заданном предельном уровне, достигаются при $k_{z1} \rightarrow 0$, т.е. в режиме квазиулевым жесткости. Но при этом, что немаловажно, при стремлении коэффициента сопротивления к

нулю $b \rightarrow 0$, наибольшее значение амплитуды колебаний основания A_{mp1} стремятся к минимальному значению (0.06...0.07 м). В то же время, даже незначительное увеличение значения коэффициента сопротивления b (до 50...100 Н/(м/с), не более) позволяет увеличить значение амплитуды колебаний основания A_{mp1} в 1.5...2 раза. Еще большее увеличение b (свыше 50...100 Н/(м/с)) нецелесообразно, поскольку при этом уменьшается диапазон частот, при котором коэффициент передачи меньше или равен заданному значению (см. рис. 3). То есть, при больших значениях b и одновременно при очень малых значениях k_{z1} , значения w_k (которые необходимо минимизировать) существенно больше, чем при $k_{z1} \rightarrow 0$ и $b \rightarrow 0$. Поэтому целесообразно использование систем с $k_{z1} \rightarrow 0$ и $b=50...100$ Н/(м/с). При подобном сочетании допустимые ходом механизма колебания основания A_{mp1} возрастают приблизительно в два раза, в то же время значения частоты w_k , соответствующей заданному значению коэффициента передачи, остается малым, близким к нулю.

Список литературы

1. Aiello G., Vallone M., Catania P. Optimising the efficiency of olive harvesting considering operator safety // *Biosystems Engineering*. 2019. Vol. 185. Pp. 15-24. DOI: 10.1016/j.biosystemseng.2019.02.016
2. Mian J., Shoushi L., Yong G., Jigang W. The improvement on vibration isolation performance of hydraulic excavators based on the optimization of powertrain mounting system // *Advances in mechanical engineering*. 2019. Vol. 11. No. 5. DOI: 10.1177/1687814019849988
3. Chi F., Zhou J., Zhang Q., Wang Y., Huang P. Avoiding the health hazard of people from construction vehicles: a strategy for controlling the vibration of a wheel loader // *International Journal of Environmental Research and Public Health*. 2017. Vol. 14. No. 3. Pp. 275. DOI: 10.3390/ijerph14030275
4. Robinah N., Safiki A., Thomas O., Annette B. Impact of road infrastructure equipment on the environment and surroundings // *Global journal of environmental science and*

6. Заключение

Полученные аналитические зависимости позволяют проводить теоретические исследования виброзащитных систем с одной степенью свободы с максимально возможной точностью. Вычислительная сложность проводимых на математической модели экспериментов существенно, на порядки снижается по сравнению с использованием методов численного интегрирования дифференциальных уравнений. Исключаются скачки и разрывы исследуемых функций, вызванные зачастую имеющей место нестабильностью процессов численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Полученные результаты могут представлять интерес для проектировщиков, разработчиков и исследователей систем виброзащиты кресел операторов строительных, дорожных и прочих мобильных и самоходных машин.

References

1. Aiello G., Vallone M., Catania P. Optimising the efficiency of olive harvesting considering operator safety. *Biosystems Engineering*. 2019. Vol. 185. Pp. 15-24. DOI: 10.1016/j.biosystemseng.2019.02.016
2. Mian J., Shoushi L., Yong G., Jigang W. The improvement on vibration isolation performance of hydraulic excavators based on the optimization of powertrain mounting system. *Advances in mechanical engineering*. 2019. Vol. 11. No. 5. DOI: 10.1177/1687814019849988
3. Chi F., Zhou J., Zhang Q., Wang Y., Huang P. Avoiding the health hazard of people from construction vehicles: a strategy for controlling the vibration of a wheel loader. *International Journal of Environmental Research and Public Health*. 2017. Vol. 14. No. 3. Pp. 275. DOI: 10.3390/ijerph14030275
4. Robinah N., Safiki A., Thomas O., Annette B. Impact of road infrastructure equipment on the environment and surroundings. *Global journal of environmental science and*

management-GJESM. 2022. Vol. 8. No. 2. Pp. 251-264. DOI: 10.22034/gjesm.2022.02.08

5. Mikheyev, V.V., Saveliev, S.V., Shushubaeva, M.K. Natural adaptation of deformable work tools during vibratory soil compaction and enhancement of there performance // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1260. No. 6. Pp. 062015. DOI: 10.1088/1742-6596/1260/6/062015

6. Zhao W., Mao K., Ma R. et al. Influence of mixing process of high performance concrete // 2019 International conference on advanced electronic materials, computers and materials engineering (AEMCME 2019). 2019. Vol. 563. Pp. 022036. DOI: 10.1088/1757-899X/563/2/022036

7. Jia J., Liu H., Wan Y. Dynamic characteristics modelling of the tamper-asphalt mixture interaction: application to predict asphalt mat density // *International journal of pavement engineering*. 2019. Vol. 20. No. 5. Pp. 530-543. DOI: 10.1080/10298436.2017.1316642

8. Lynas D., Burgess-Limerick R. Whole-body vibration associated with dozer operation at an Australian surface coal mine // *Annals of work exposures and health*. 2019. Vol. 63. No. 8. Pp. 881-889. DOI: 10.1093/annweh/wxz054

9. Furmanov D., Chizhov V., Tyuremnov I., Troshin D. Loads on cutter teeth for removing asphalt pavement // XXII International scientific conference: construction the formation of living environment (FORM-2019). 2019. Vol. 97. P. 06031. DOI: 10.1051/e3sconf/20199706031

10. Galdin N.S., Semenova I.A., Galdin V.N. Analysis of the striker stroke impact on the hydropneumatic impact devices energy performance // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1260. No. 11. Pp. 112010. DOI: 10.1088/1742-6596/1260/11/112010

11. Ivanov S., Meleshkova Z., Mikalauskas A., Ivanova L. Modeling of nonlinear vibration protection systems of mining machines // *Procedia Computer Science*. 2019. Vol. 156. Pp. 292-299. DOI: 10.1016/j.procs.2019.08.205

12. Yang X., Chen H., Mao J., Wei Y. Dynamical behavior of coal shearer traction-swing coupling under corrected loads // *Scientific reports*. 2020. Vol. 10. No. 1. Pp. 8630.

management-GJESM. 2022. Vol. 8. No. 2. Pp. 251-264. DOI: 10.22034/gjesm.2022.02.08

5. Mikheyev V.V., Saveliev S.V., Shushubaeva M.K. Natural adaptation of deformable work tools during vibratory soil compaction and enhancement of there performance. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1260. No. 6. Pp. 062015. DOI: 10.1088/1742-6596/1260/6/062015

6. Zhao W., Mao K., Ma R. et al. Influence of mixing process of high performance concrete. 2019 International conference on advanced electronic materials, computers and materials engineering (AEMCME 2019). 2019. Vol. 563. Pp. 022036. DOI: 10.1088/1757-899X/563/2/022036

7. Jia J., Liu H., Wan Y. Dynamic characteristics modelling of the tamper-asphalt mixture interaction: application to predict asphalt mat density. *International journal of pavement engineering*. 2019. Vol. 20. No. 5. Pp. 530-543. doi: 10.1080/10298436.2017.1316642

8. Lynas D., Burgess-Limerick R. Whole-body vibration associated with dozer operation at an Australian surface coal mine. *Annals of work exposures and health*. 2019. Vol. 63. No. 8. Pp. 881- 889. DOI: 10.1093/annweh/wxz054

9. Furmanov D., Chizhov V., Tyuremnov I., Troshin D. Loads on cutter teeth for removing asphalt pavement // XXII International scientific conference: construction the formation of living environment (FORM-2019). 2019. Vol. 97. Pp. 06031. DOI: 10.1051/e3sconf/20199706031

10. Galdin N.S., Semenova I.A., Galdin V.N. Analysis of the striker stroke impact on the hydropneumatic impact devices energy performance. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1260. No. 11. Pp. 112010. DOI: 10.1088/1742-6596/1260/11/112010

11. Ivanov S., Meleshkova Z., Mikalauskas A., Ivanova L. Modeling of nonlinear vibration protection systems of mining machines. *Procedia Computer Science*. 2019. Vol. 156. Pp. 292-299. DOI: 10.1016/j.procs.2019.08.205

12. Yang X., Chen H., Mao J., Wei Y. Dynamical behavior of coal shearer traction-swing coupling under corrected loads. *Scientific reports*. 2020. Vol. 10. No. 1. Pp. 8630.

DOI: 10.1038/s41598-020-65184-w

13. Yilmaz D., Gokduman M. Development of a measurement system for noise and vibration of combine harvester // *International journal of agricultural and biological engineering*. 2020. Vol. 13. No. 6. P. 104-108. DOI: 10.25165/j.ijabe.20201306.5554

14. Poje A., Grigolato S., Potočnik I. Operator exposure to noise and whole-body vibration in a fully mechanised CTL forest harvesting system in karst terrain // *Croatian Journal of Forest Engineering*. 2019. Vol. 40. Pp. 139-250.

15. Lyashenko M.V., Pobedin A.V., Potapov P.V. Analysis of possible dynamic vibration dampers uses in tractor cabins suspensions // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 150. P. 1245-1251. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.132

16. Dhanjee K.C., Sanjay K.P., Vivekanand K., Netai C.K. Whole-body vibration exposure of heavy earthmoving machinery operators in surface coal mines: a comparative assessment of transport and non-transport earthmoving equipment operators // *International journal of occupational safety and ergonomics: JOSE*. 2020. P. 1-10. DOI: 10.1080/10803548.2020.1785154

17. Burian, Y.A., Sitnikov, D.V., Silkov, M.V., Belkov, V.N. The active system of vibration isolation with digital twin and control by acceleration // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2021. Vol. 1791. No. 1. P. 012007. DOI: 10.1088/1742-6596/1791/1/012007

18. Burian Yu.A., Silkov V.M., Sitnikov V.D. Quasi-zero stiffness vibration isolation support with stiffness corrector based on a rubber-cord air spring // *AIP Conference Proceedings*. 2020. Vol. 2285. Pp. 030007. DOI: 10.1063/5.0027543

19. Burian, Yu.A., Silkov, M.V., Sitnikov, D.V. Vibration isolation support with quasi-zero stiffness effect with a rubber-cord air spring in the stiffness corrector // *AIP Conference Proceedings*. 2021. Vol. 2412. Pp. 030019. DOI: 10.1063/5.0075036

20. Korytov M.S., Shcherbakov V.S., Titenko V.V., Pohekueva I.E. Oscillations simulation of the vibration protection suspended load with a movable base // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol.

DOI: 10.1038/s41598-020-65184-w

13. Yilmaz D., Gokduman M. Development of a measurement system for noise and vibration of combine harvester. *International journal of agricultural and biological engineering*. 2020. Vol. 13. No. 6. Pp. 104-108. DOI: 10.25165/j.ijabe.20201306.5554

14. Poje A., Grigolato S., Potočnik I. Operator exposure to noise and whole-body vibration in a fully mechanised CTL forest harvesting system in karst terrain. *Croatian Journal of Forest Engineering*. 2019. Vol. 40. Pp. 139-250.

15. Lyashenko M.V., Pobedin A.V., Potapov P.V. Analysis of possible dynamic vibration dampers uses in tractor cabins suspensions. *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 150. Pp. 1245-1251. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.132

16. Dhanjee K.C., Sanjay K.P., Vivekanand K., Netai C.K. Whole-body vibration exposure of heavy earthmoving machinery operators in surface coal mines: a comparative assessment of transport and non-transport earthmoving equipment operators. *International journal of occupational safety and ergonomics: JOSE*. 2020. Pp. 1-10. DOI: 10.1080/10803548.2020.1785154

17. Burian Y.A., Sitnikov D.V., Silkov M.V., Belkov V.N. The active system of vibration isolation with digital twin and control by acceleration. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 1791. No. 1. Pp. 012007. DOI: 10.1088/1742-6596/1791/1/012007

18. Burian Yu.A., Silkov V.M., Sitnikov V.D. Quasi-zero stiffness vibration isolation support with stiffness corrector based on a rubber-cord air spring. *AIP Conference Proceedings*. 2020. Vol. 2285. Pp. 030007. DOI: 10.1063/5.0027543

19. Burian Yu.A., Silkov M.V., Sitnikov D.V. Vibration isolation support with quasi-zero stiffness effect with a rubber-cord air spring in the stiffness corrector. *AIP Conference Proceedings*. 2021. Vol. 2412. Pp. 030019. DOI: 10.1063/5.0075036

20. Korytov M.S., Shcherbakov V.S., Titenko V.V., Pohekueva I.E. Oscillations simulation of the vibration protection suspended load with a movable base. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 1791(1). Pp.

1791(1). Pp. 012013.

DOI: 10.1088/1742-6596/1791/1/012013

21. Chang, Y., Zhou, J., Wang, K. A quasi-zero-stiffness dynamic vibration absorber // *Journal of sound and vibration*. 2021. Vol. 494. Pp. 115859.

DOI: 10.1016/j.jsv.2020.115859

22. Korytov M.S., Shcherbakov V.S., Titenko V.V., Pohekueva I.E. Study of the antivibration suspended seat oscillations with quasi-zero stiffness effect under sinusoidal excitation // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 1901(1). Pp. 012120. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012120

23. Hongguang F., Xiuqin Z., Zhenbing Z. Automated and readable simplification of trigonometric expressions // *Mathematical and Computer Modelling*. 2006. Vol. 44. No. 11-12. Pp. 1169-1177.

DOI: 10.1016/j.mcm.2006.04.002

24. Liu X.T., Rao S.S. Vibration Analysis in the presence of uncertainties using universal grey system theory // *Journal of vibration and acoustics*. 2018. Vol. 140(3). Pp. 031009. DOI: 10.1115/1.4038940

25. Комкин А.И. Вибрация. Воздействие, нормирование, защита // *Безопасность жизнедеятельности*. 2004. № 5. С. 1-16.

† 012013. DOI: 10.1088/1742-6596/1791/1/012013

† 21. Chang Y., Zhou J., Wang K. A quasi-zero-stiffness dynamic vibration absorber // *Journal of sound and vibration*. 2021. Vol. 494. Pp. 115859. DOI: 10.1016/j.jsv.2020.115859

† 22. Korytov M.S., Shcherbakov V.S., Titenko V.V., Pohekueva I.E. Study of the antivibration suspended seat oscillations with quasi-zero stiffness effect under sinusoidal excitation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 1901(1). Pp. 012120. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012120

† 23. Hongguang F., Xiuqin Z., Zhenbing Z. Automated and readable simplification of trigonometric expressions. *Mathematical and Computer Modelling*. 2006. Vol. 44. No. 11-12. Pp. 1169-1177. DOI: 10.1016/j.mcm.2006.04.002

† 24. Liu X.T., Rao S.S. Vibration Analysis in the presence of uncertainties using universal grey system theory. *Journal of vibration and acoustics*. 2018. Vol. 140(3). Pp. 031009. DOI: 10.1115/1.4038940

† 25. Комкин А.И. Вибрация. Воздействие, нормирование, защита. *Безопасность жизнедеятельности*. 2004. No. 5. pp. 1-16. (In Russian)