

УДК (УДК) 625.731.08

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАЛИПАНИЯ ГРУНТА НА  
ПОВЕРХНОСТЬ РАБОЧИХ ОРГАНОВ ЗЕМЛЕРОЙНО-ТРАНСПОРТНЫХ МАШИИPHYSICAL-MATHEMATICAL MODEL OF GROUND ADHESION ON THE SURFACE  
OF THE EXCAVATING PARTS OF EARTHMOVING MACHINESСладкова Л.А., Григорьев П.А.  
Sladkova L.A., Grigorev P.A.Российский университет транспорта (Москва, Россия)  
Russian University of Transport (Moscow, Russian Federation)

**Аннотация.** *Изнашиванием поверхностей рабочих органов землеройных машин при их взаимодействии с грунтом, а также проблемой налипаемости грунтов на поверхности рабочих органов машин и методами борьбы занимались большое количество отечественных и зарубежных ученых. Известно, что классическая теория резания грунтов базируется на эмпирических зависимостях, полученных экспериментальным путем. Они позволяют, в основном, раскрыть сущность процесса копания грунта, но отличаются друг от друга, как по своему описанию, так и по количественным результатам. В настоящей статье авторы предлагают на основе теории вероятностей теоретические исследования процесса копания грунта и взаимодействия рабочего органа с грунтом. Полученные результаты подтверждены авторами предыдущих исследований. Разработанная физическая модель взаимодействия частиц грунта с поверхностью рабочего органа при адгезии позволяет раскрыть физическую причину процесса изнашивания поверхности рабочих органов.*

**Ключевые слова:** *физико-математическая модель, копание грунта, резание грунта, липкость, изнашивание, адгезия, когезия.*

**Дата принятия к публикации:** 28.10.2021  
**Дата публикации:** 25.12.2021

**Сведения об авторах:**

**Сладкова Любовь Александровна** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Наземные транспортно-технологические средства» ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта», e-mail: rich.cat2012@yandex.ru.

**Григорьев Павел Александрович** – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры «Наземные транспортно-технологические средства» ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта», e-mail: grigorievpavel1996@yandex.ru.

ORCID: 0000-0002-5409-6250

**Abstract.** *A large number of domestic and foreign scientists were engaged in the wear of the surfaces of the excavating parts of earthmoving machines during their interaction with the ground, as well as the problem of the adhesion of soils on the surface of the working excavating parts of machines and methods of struggle. It is known that the classical theory of digging is based on empirical dependencies obtained experimentally. They allow, basically, to reveal the essence of the process of dredging, but they differ from each other, both in their description and in the number of results. In this article, the authors propose, on the basis of probability theory, theoretical studies of the process of dredging and the interaction of the excavating part with the soil. The authors of previous studies confirm the obtained results. The developed physical model of the interaction of soil particles with the surface of the excavating part during adhesion allows us to reveal the physical cause of the process of wear of the surface of the excavating parts.*

**Keywords:** *physical-mathematical model, dredging, digging, tackiness, wear, adhesion, cohesion.*

**Date of acceptance for publication:** 28.10.2021  
**Date of publication:** 25.12.2021

**Authors' information:**

**Lubov A. Sladkova** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department Ground transportation and technological means at Russian University of Transport, e-mail: rich.cat2012@yandex.ru.

**Pavel A. Grigorev** – Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor of the Department Ground transportation and technological means at Russian University of Transport, e-mail: grigorievpavel1996@yandex.ru.

## 1. Введение

Налипание грунта на поверхности рабочих органов не теряет своей актуальности из-за отсутствия физико-математической модели, способной раскрыть физическую сущность этого процесса, который можно было бы оценить количественно. Существующие в настоящее время математические зависимости представляют собой эмпирические функции, полученные экспериментальным путем. В некоторых из них даже не соблюдена размерность. Создание модели процесса взаимодействия грунта с поверхностью рабочего органа землеройных машин и выявление физических основ налипания его на поверхность рабочего органа позволит разработать эффективные способы борьбы не только с этим явлением, но и с изнашиваемостью рабочего органа. В свою очередь полученное решение позволит повысить производительность машин.

Первое, что бросается в глаза в практике эксплуатации машин, что при взаимодействии рабочего органа с грунтом, имеет место износ, который носит абразивный характер. Поэтому создание модели рационально начинать с вопроса, касающегося непосредственного контакта грунта с поверхностью рабочего органа, который называется изнашиванием.

## 2. Вероятностная модель взаимодействия частиц грунта при изнашивании

Рассмотрим теоретические аспекты взаимодействия поверхности рабочего органа машины с грунтом при изнашивании.

Часть частиц грунта, являющихся подвижными относительно неподвижного рабочего органа, например, землеройно-транспортной машины (в дальнейшем, просто машины), закрепляются на последнем и удерживаются там, в течение некоторого времени. Время и путь, проходимый каждой частицей, неодинаковы. Другие частицы грунта соприкасаются с поверхностью рабочего органа, перекатываясь между ним и грунтом. Таким образом, в процессе изнашивания будут участвовать не все частицы грунта и не

все время. Действие частиц грунта на рабочий орган различно и носит случайный характер, а число частиц достаточно велико. Таким образом, явления, происходящие в процессе абразивного изнашивания можно описать законами теории вероятностей.

Разрушение материала рабочего органа могут производить как частицы грунта, закрепленные на наконечнике, так и свободные частицы грунта. Вероятность  $P(S)$  (частоту) [1 - 4] их воздействия на рабочий орган можно описать уравнением:

$$P(S) = [N_0 - n(S)] / N_0, \quad (1)$$

где  $N_0$  – общее число частиц грунта в зоне трения;  $n(S)$  – число частиц грунта, вышедших из зоны трения  $S$ .

При этом, для определения разрушающего действия абразивных частиц следует учитывать, какая их доля способна оказывать вредное воздействие и в течение какого времени, это влияние будет сказываться. Исходя из сказанного, зависимость (1) представим в виде:

$$P(S) = [N_0 - n(S)] f(S) / N_0, \quad (2)$$

где  $f(S)$  – коэффициент эффективности, показывающий, какая доля частиц оказывает влияние на изнашивание.

Вероятность выбывания  $Q(S)$  частиц грунта из зоны трения [1 - 4] определим как

$$Q(S) = 1 - P(S) = n(S) / N_0. \quad (3)$$

Пусть  $N(S)$  – число частиц грунта, воздействующих на рабочий орган на отрезке пути от  $S$  до  $S + \Delta S$ . Тогда число вышедших из зоны трения частиц на этом участке за время  $t$  будет равно

$$n(S) = N(S) - N(S + \Delta S). \quad (4)$$

Исходя из вышеприведенного предположения и учитывая выражение (3), запишем:

$$N(S) = P(S)N_0;$$

$$N(S + \Delta S) = P(S + \Delta S)N_0. \quad (5)$$

Очевидно, что с увеличением толщины вырезаемого слоя грунта (глубины резания), число частиц, взаимодействующих с наконечником, возрастает. Тогда вероятность (частота) выбывания частиц грунта равна

$$Q(S) = \int_0^S n(S) dS. \quad (6)$$

С другой стороны, выражение (6) представляет работу при непрерывной замене выбывших частиц.

Средняя частота выбывания частиц грунта на участке рабочего органа, равна:

$$\nu(S) = Q(S) / \Delta S = n(S) / N_0 \Delta S. \quad (7)$$

Из выражения (7) определим общее число частиц, выбывших из зоны контакта:

$$n(S) = \nu(S) N_0 \Delta S. \quad (8)$$

Общее число частиц, участвующих в разрушении поверхности рабочего органа машины за время  $t$  и выбывших из зоны контакта на длине пути резания  $l$  (длина пути рыхления рабочим органом рыхлителя, формирование призмы волочения рабочим органом отвального типа, набор грунта в ковш экскаватора и т.п.):

$$\Omega(S) = Q(S) + \omega \int_0^S n(S) N_0 dS. \quad (9)$$

Предположим, что число частиц грунта равно  $\lambda$ . Рассмотрим интенсивность их выбывания на участке  $\Delta S$ . Здесь  $\Delta S$  – интервал пути. Считаем, что выбывание частиц на всем пути по времени не изменяется. Тогда, используя зависимости (5) и (7), получим:

$$P(S) = [N_0 - n(S)] f(S) / N_0; \quad (10)$$

$$\lambda(S) = N_0 [P(S + \Delta S) - P(S)] / N_{CP}, \quad (11)$$

где  $N_{CP} = N_0 - n(S)$ .

Вероятность воздействия частиц грунта на поверхность рабочего органа будет равна:

$$P(S) = C - \int_0^S \lambda(S) dS$$

или

$$\ln P(S) = \int_0^S \lambda(S) dS, \quad (12)$$

Где  $C$  – постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями при разработке грунтов.

Интенсивность выбывания частиц, как функция пути дает представление о процессе изнашивания поверхности рабочего органа машины.

Среднее время разрушающего действия частиц грунта на рабочий орган запишем в виде интегрального уравнения:

$$T = \int_0^{\infty} P(t) dt \quad \text{или} \quad T = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} t_i, \quad (13)$$

где  $t_i$  – время действия  $i$ -й частицы грунта.

Пусть за время  $T$  линейный износ рабочего органа равен  $\Delta l$ . Тогда, используя формулу (13), время  $t$  до величины  $l$  критического износа определится по формуле:

$$t = \frac{10^{4T}}{\Delta l} \cdot \frac{1}{3600} = l \sum_{i=1}^{N_0} \frac{t_i}{\Delta l N_0}. \quad (14)$$

Зависимость (14) позволяет определить среднее время до полного износа рабочего органа.

Тогда, в свою очередь, скорость изнашивания равна:

$$V = \frac{\Delta l \cdot 10^{-4}}{4 \sum_{i=1}^{N_0} t_i}. \quad (15)$$

Время действия  $i$ -й частицы грунта, используя предположения, сделанные в начале статьи, можно определить, как:

$$t_i = \frac{L}{V_{p.o.}} = \frac{\sum_{i=1}^H L_i}{V_{p.o.} N_0}, \quad (16)$$

где  $L_i$  – линейный размер режущей кромки рабочего органа машины;  $V_{p.o.}$  – скорость перемещения рабочего органа;  $H$  – глубина резания.

Зависимость (15) позволяет определять интенсивность износа различных поверхностей, подвергающихся абразивному износу. Для этого достаточно знать величину  $\Delta l$ , характеризующую глубину деформации материала рабочего органа при соприкосновении его с абразивной средой.

Формулы (14 - 16) справедливы при определении равномерного полного линейного износа поверхности рабочего органа.

Используя зависимость (16) определим, например, необходимое число наконечников рыхлителя в смену при интенсивности износа со скоростью  $V$ :

$$k = \frac{t_{cm}}{t}, \quad (17)$$

где  $t_{cm}$  – продолжительность смены;  $t$  – время, затрачиваемое на критический износ наконечника рыхлителя.

По предложенным зависимостям рассчитаем износ наконечников рыхлителя в зависимости от крупности частиц на длине пути резания  $L_l = 1$  м (табл. 1). Длину поверхности наконечника, находящуюся в контакте с грунтом, примем равной 67 мм (передняя часть нижней грани). За скорость перемещения наконечника в грунте примем максимально допустимую рабочую скорость базового тягача  $V=1,1$  м/с.

По формуле (14) среднее время разрушающего действия  $i$ -й частицы равно:

$t_i = 67 \cdot 10^{-3} / 1,1 = 60,3 \cdot 10^{-3}$  с. Тогда на длине пути резания число частиц грунта, контактирующего с наконечником (табл. 1), будет равно:

$$N_0 = \frac{L_i}{d_i},$$

где  $d_i$  – диаметр частицы.

Величина износа наконечника рыхлителя под действием одной  $i$ -й частицы грунта равна

$$\Delta l = \frac{l}{N_0}.$$

Таблица 1

Изнашивающая способность грунтов в зависимости от крупности частиц

Тип грунта	Диаметр частицы $d$ , мм	Время действия $i$ -й частицы $t$ , с	Число частиц грунта в зоне трения $N_0 \cdot 10^{-5}$	Износ от действия $i$ -й частицы $\Delta l \cdot 10^{-3}$ , мм	Время до полного износа $t$ , мм	Скорость износа $v$ , мкм/ч	Скорость износа экспериментальная $v$ , мкм/ч [5]	Число наконечников в смену $k$ , шт
Пески, с включениями гравия и дресвы	2	$60,3 \cdot 10^{-3}$	0,5	140	83,7	207	265...350	0,098
	5		0,2	350	33,5	522	400...650	0,245
	10		0,1	700	16,7	1044	-	0,49
	15		0,066	1061	11,1	1334	-	0,74
	20		0,05	1400	8,3	2088	-	1,01
	35		0,029	2417	4,9	3636	3333	1,67
	40		0,025	2800	4,2	4176	4000	1,95
	50		0,020	3500	3,4	5220	5555	2,41
	70		0,014	5000	2,3	7461	7777	3,57
	80		0,012	5833	2,0	8703	-	4,10
	90		0,011	6364	1,8	9450	-	4,56
	100		0,010	7000	1,7	10440	-	4,82

Скорости износа наконечников рыхлителей, вычисленные по предлагаемой выше методике экспериментально подтверждены в данной работе и в исследованиях А.К. Рейша, Ю.А. Ветрова [6 - 8].

### 3. Физическая модель взаимодействия частиц грунта с поверхностью рабочего органа при адгезии

Рассмотрим схему взаимодействия грунтовой стружки массой  $m$  с рабочим органом землеройной машины (рис. 1).



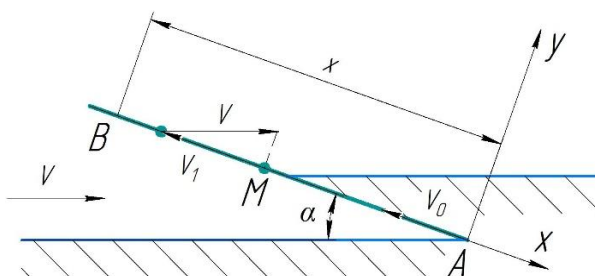


Рис. 1. Взаимодействие грунтовой стружки с поверхностью рабочего органа

Пусть рабочий орган машины перемещается в грунте с рабочей скоростью  $V$ .

В трудах отечественных авторов классической теории копания грунта А.Н. Зеленина, Н.Г. Домбровского, Ю.И. Ветрова [9] считается, что грунт по поверхности рабочего органа перемещается с постоянной скоростью (по крайней мере, нигде не отмечено, что она является переменной). На наш взгляд данное утверждение имеет недостаток, в силу особенностей физико-механических свойств грунта: влажности, липкости, гранулометрического состава и др.

Очевидно, что в точке  $A$  (рис. 1) в момент встречи рабочего органа с грунтом, скорость перемещения грунтовой стружки по поверхности рабочего органа равна нулю. По мере продвижения рабочего органа вперед скорость грунтовой стружки будет изменяться и перемещается по поверхности рабочего органа уже с другой скоростью.

Считаем, что скорость перемещения рабочего органа в грунте является постоянной величиной, т.е.  $V = const$  (рис.1). Тогда, через промежуток времени  $t$ , в произвольной точке  $M$ , скорость перемещения грунтовой стружки по поверхности рабочего органа достигнет величины  $V_1$ , которая равна:

$$V_1 = V \cos \alpha, \quad (18)$$

где  $\alpha$  – угол резания рабочего органа, являющийся постоянной величиной.

Однако, на наш взгляд, применительно к теории резания грунта величина угла  $\alpha$  в зависимости (18) не является углом резания, представляет некий угол  $\alpha_1 \neq \alpha$ , отличный от угла  $\alpha$ . Он зависит от изменения вертикальной составляющей скорости резания грунта и определяется, как говорилось выше,

числом частиц, взаимодействующих с поверхностью рабочего органа машины. Таким образом, видно, что скорость  $V_1$  будет переменной величиной.

Стружка грунта, пройдя участок длиной  $x$  за время  $t$  и достигнув максимальной скорости  $V_{max}$ , дальше замедляет свое движение (рис. 2) в результате действия силы трения  $F_{mp}$  и адгезионно-когезионных сил  $F_a$  и  $F_k$  (рис. 3).

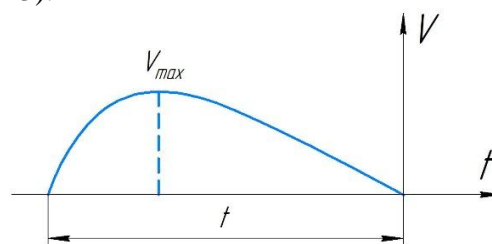


Рис. 2. Изменение скорости перемещения грунтовой стружки по поверхности рабочего органа

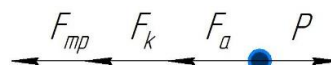


Рис. 3. Схема распределения сил по поверхности рабочего органа при взаимодействии с грунтом

При достижении нулевой скорости можно наблюдать процесс налипания грунта на поверхность рабочих органов. Изменение скорости свидетельствует о динамическом режиме перемещения стружки грунта, которое можно представить в виде уравнения динамического равновесия:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{mp} + C_0 - P, \quad (19)$$

где  $P$  – тяговое усилие базовой машины, Н;  $C_0$  – сила сцепления грунта [2], которая, на наш взгляд, определяется как:

$$C_0 = C_1 + C_2 + C_3, \quad (20)$$

$C_1$  – непосредственное сцепление грунта с грунтом;  $C_2$  – сцепление зацепления частиц грунта друг за друга, образующих толщу грунта на поверхности рабочего органа;  $C_3$  – когезионное сцепление частиц грунта, т.е. слипание частиц грунта между собой.

Последние две составляющих можно отнести к силам когезии – связи между части-

цами грунта, которые определяют толщину налипания слоя грунта, образуя когезионную прочность.

Усилие сцепления  $C_0$  ведет к налипанию на рабочие поверхности слоя грунта толщиной до нескольких десятков сантиметров. Исследования, проводимые авторами по оценке сил сцепления, показывают различные числовые значения показателей сцепления.

Масловым Н.Н. [9] экспериментальным путем в табличном варианте получены результаты исследований зависимости между усилием сцепления и углом внутреннего трения для глин, суглинков и супесей. Проведенная обработка результатов эксперимента, с величиной среднеквадратического отклонения не ниже 0,9856 позволила получить эмпирические зависимости для определения усилия сцепления в зависимости от угла внутреннего трения грунта  $\varphi$  (табл. 2).

Таблица 2

Зависимость усилия сцепления от угла внутреннего трения грунта

Тип грунта	Зависимость
глина	$C_0 = 0,0404e^{0,1331\varphi}$
суглинок	$C_0 = 0,0114e^{0,1546\varphi}$
супесь	$C_0 = 0,001\varphi^2 - 0,0283\varphi + 0,1983$

С другой стороны, авторами [10, 11] была установлена связь между крупностью частиц грунта и силой сцепления:

$$C_0 = 72,47r^{0,5302}, \quad (21)$$

где  $r$  – радиус частиц грунта, м.

Из уравнения (19) видно, что условия равновесия  $F_{mp} + C_0 = P$ , что свидетельствует о начале процесса налипания грунта на поверхность рабочего органа. Данный вывод подтвержден практическими наблюдениями о положении налипшего грунта на поверхность рабочего органа, который образуется на расстоянии от режущей кромки, образуя, так называемое, ядро уплотнения.

Решение уравнения (19) приведем к виду:

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^t \left( \frac{F_{mp}}{m} + \frac{C_0}{m} - \frac{P}{m} \right) dt + C_1 \rightarrow$$

$$x = \int_0^t \left[ \left( \frac{F_{mp}}{m} + \frac{C_0}{m} - \frac{P}{m} \right) dt + C_1 \right] dt + C_2, \quad (22)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  постоянные интегрирования, определяемые из граничных (начальных) условий.

На первый взгляд уравнение (22) во времени носит линейный характер. Исследуем слагаемые уравнения (22). Здесь тяговое усилие  $P$  определяется как отношение мощности базовой машины к рабочей скорости ее перемещения с учетом коэффициента полезного действия. Ее в расчетах можно условно принять постоянной величиной. Однако, видно, что масса отделяемой грунтовой стружки перемещаемой по поверхности рабочего органа является величиной переменной и равна:

$$m = xhL\gamma, \quad (23)$$

$x$  – величина перемещения грунтовой стружки по поверхности рабочего органа;  $h$  – толщина вырезаемой стружки;  $L$  – длина режущей кромки рабочего органа;  $\gamma$  – объемная масса грунта.

Величина  $C_1$  (постоянная интегрирования) равна:

$$C_1 = \left( -fg \cos \alpha - \frac{C_0}{xhL\gamma} + \frac{P}{xhL\gamma} \right) t. \quad (24)$$

После несложных математических преобразований определено, что первое слагаемое (сила трения) является постоянной величиной, не зависящей от величины перемещения грунтовой стружки:

$$\frac{F_{mp}}{m} = gf \cos \alpha, \quad (25)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $f$  – коэффициент трения грунта по стали.

Таким образом, видно, что сила трения является постоянной величиной, зависящей от величины коэффициента трения  $f$  по поверхности рабочего органа.

На наш взгляд, на величину перемещения грунтовой стружки по поверхности рабочего органа, оказывает влияние величина  $C_0$ . При ее оценке авторами [10, 11] также было установлено, что липкость грунта зависит не только от крупности частиц, но и от темпе-

ратуры (табл. 3), при повышении которой она снижается.

Таблица 3

Силы адгезии для грунтов с различным гранулометрическим составом [3, 4]

Радиус частиц, $R \times 10^{-6}$ , м	Температура, °С		
	20	40	80
5	153,92	88,63	27,88
10	255,63	136,00	43,51
20	367,58	208,34	65,85
40	537,41	272,67	87,09
50	594,12	310,23	97,70
100	840,15	443,45	145,18
250	1340	733,78	237,36
500	1862	1024	363,06

Из наблюдений Сладковой Л.А. [5] следует, что при взаимодействии с грунтом рабочий орган машины (наконечники рыхлителей, зубья ковшей экскаваторов) нагревается до температуры низкого отпуска (солонный цвет). Наблюдалось свечение в темноте указанных элементов, причем судя по градиенту максимальная температура нагрева приходится на место, связанное с макси-

мальной скоростью перемещения грунтовой стружки или на наличие зоны максимального давления со стороны грунта на поверхность рабочего органа.

Анализируя уравнения (табл. 2) и (21) установлено, что скорость перемещения грунтовой стружки по поверхности рабочего органа и липкость грунта  $C_0$ , имеющая не последнее значение на процесс копания грунта рабочими органами машин не является линейной функцией и зависит от физико-механических свойств грунта и температуры нагрева рабочего органа в момент его контакта с грунтом.

#### 4. Заключение

Разработанная физико-математическая модель взаимодействия грунта с поверхностью рабочих органов землеройно-транспортных машин позволила рассмотреть процесс копания грунта под другим углом зрения и выявить причины неравномерности изнашивания поверхностей рабочих органов машин.

#### Список литературы

1. Краснов М.Л. Вся высшая математика. 3-е изд., испр. М: URSS, 2007. 294 с.
2. Мятлев В.Д., Панченко Л.А., Ризниченко Г.Ю., Терехин А.Т. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели. 2-е изд., испр. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2017. 321 с.
3. Серовайский С.Я. История математики. Эволюция математических идей. Вычислительная математика. Теория вероятностей. Информатика. Математическая логика. Книга 3. М.: USSR, 2019. 240 с.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. 5-е изд. М.: Высш. шк., 1998. 576 с.
5. Сладкова Л.А. Создание самозатачивающихся наконечников рыхлителей повышенной долговечности для разработки многолетнемерзлых грунтов. дисс. ... канд. техн. наук по спец. 05.05.04, Москва, 1990. 248 с.
6. Рейш, А.К., Борисов С.М., Бандаков

#### References

1. Krasnov M.L. *Vsya vysshaya matematika: uchebnik dlya studentov vysshikh tekhnicheskikh uchebnykh zavedeniy*. Moskva, URSS. 2007, 294 p. (In Russian)
2. Myatlev V.D., Panchenko L.A., Riznichenko G.Yu., Terekhin A.T. *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika. Matematicheskiye modeli*. Moskva, Izdatelstvo Yurayt, 2017. 321 p. (In Russian)
3. Serovayskiy S.Ya. *Istoriya matematiki. Evolyutsiya matematicheskikh idey. Vychislitelnaya matematika. Teoriya veroyatnostey. Informatika. Matematicheskaya logika. Kniga 3*. Moskva, USSR. 2019, 240 p. (In Russian)
4. Venttsel E.S. *Teoriya veroyatnostey [Probability Theory]*. Moskva, Vyssh. shk., 1998. 576 p. (In Russian)
5. Sladkova L.A. *Sozdaniye samozatachivayushchikhsya nakonechnikov rykhlyteley povyshennoy dolgovechnosti dlya*

