Научно-технический вестник Брянского государственного университета, 2019, №2
Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta, 2019, No.2
DOI: 10.22281/2413-9920-2019-05-02-265-268

УДК (UDC) 625.8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПОВЕДЕНИЯ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АСФАЛЬТОБЕТОННОЙ СМЕСИ

THE INITIAL CONDITIONS DETERMINATION OF THE DIFFERENTIAL EQUATION DESCRIBING THE BEHAVIOR OF THE ASPHALT CONCRETE RHEOLOGICAL MODEL

Шишкин Е.А., Иванченко С.Н.
Shishkin E.A., Ivanchenko S.N.

Тихоокеанский государственный университет (Хабаровск, Россия)
Pacific National University (Khabarovsk, Russia)

Аннотация. *Для исследования поведения материала в процессе нагружения широко применяется реологическое моделирование. Закон поведения реологической модели описывается дифференциальным уравнением. При втором порядке уравнения и выше возникают трудности в решении, связанные с установлением начальных условий. В работе рассмотрена общая методика установления начальных условий для последующего решения дифференциального уравнения модели. Исследование поведения реологической модели на бесконечно малом временном промежутке позволяет получить необходимые начальные условия.*

Ключевые слова: *асфальтобетон, уплотнение, реологическая модель.*

Дата принятия к публикации: *29.04.2019*
Дата публикации: *25.06.2019*

Сведения об авторах:

Шишкин Евгений Алексеевич – старший преподаватель, кафедра транспортно-технологических машин в строительстве и горном деле, ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет», *e-mail: 004655@pnu.edu.ru*.

Иванченко Сергей Николаевич – доктор технических наук, профессор, ректор ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет», *e-mail: sni@mail.khstu.ru*.

Abstract. *Rheological modeling is widely used to study the behavior of the material during loading. The law of behavior of the rheological model is described by a differential equation. In the second order of the equation and above there are difficulties in solving, associated with the determination of initial conditions. In this article we consider a general method of determination the initial conditions for the subsequent solution of the differential equation of the model. The study of the behavior of the rheological model at an infinitely small time interval allows us to obtain the necessary initial conditions.*

Keywords: *asphalt concrete, compaction, rheological model.*

Date of acceptance for publication: *29.04.2019*
Date of publication: *25.06.2019*

Authors' information:

Evgeniy A. Shishkin – Senior lecturer, Department of Transport and technological machines in construction and mining, Pacific National University, *e-mail: 004655@pnu.edu.ru*.

Sergej N. Ivanchenko – Doctor of Technical Sciences, Professor, Rector of Pacific National University, *e-mail: sni@mail.khstu.ru*.

1. Введение

Завершающей операцией строительства асфальтобетонного покрытия автомобильных дорог является уплотнение. В зависимости от используемых для этой операции средств изменяется режим нагружения материала. Для уплотнения асфальтобетонной смеси применяются следующие рабочие органы: гладкий валец, работающий в статическом или динамическом режимах, пневматическое колесо, виброплита. Различие в конструкции и режимах работы уплотняющих органов машин обусловливает различное поведение материала. Теоретическое изучение процесса взаимодействия рабочего органа уплотнителя с материалом способствует более обоснованному подходу к выбору режимов работы техники для строительства асфальтобетонного покрытия.

Одним из наиболее широко распространенных методов моделирования поведения материала в процессе нагружения является реологическое моделирование. В настоящее

Научно-технический вестник Брянского государственного университета, 2019, №2
Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta, 2019, No.2
DOI: 10.22281/2413-9920-2019-05-02-265-268

время разработано множество реологических моделей, описывающих поведение асфальтобетонной смеси под нагрузкой [1-3]. Законы поведения различных реологических моделей представляют из себя дифференциальные уравнения разных порядков. При втором порядке уравнения и выше возникают затруднения с решением, которые связаны с установлением начальных условий.

Целью данной работы является описание общей методики установления начальных условий для последующего решения дифференциального уравнения модели.

2. Описание разработанной методики

В качестве примера рассматривается реологическая модель тела Бюргерса (рис. 1, а).

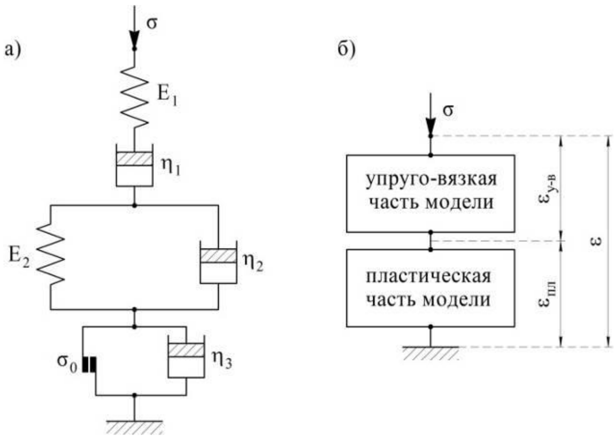

Рис. 1. Схема исследуемой модели:
а - реологическая модель тела Бюргерса;
б - условное разбиение модели

Рассмотрим случай одноразового статического нагружения, т.е.

$$\sigma(t) = \sigma_c = const .$$

Необходимо определить закон изменения деформации $\varepsilon(t)$. При условии $\sigma_c > \sigma_0$ общую деформацию можно представить в виде суммы деформаций упруго-вязкой части модели $\varepsilon_{у-в}$ и пластической деформации $\varepsilon_{пл}$ (рис. 1, б)

$$\varepsilon = \varepsilon_{у-в} + \varepsilon_{пл}. \tag{1}$$

Дифференциальное уравнение для упруго-вязкой части модели имеет вид [4]

$$\varepsilon'' + \frac{E_2}{\eta_2}\varepsilon' = \frac{E_2}{\eta_1\eta_2}\sigma + \left(\frac{1}{\eta_2} + \frac{E_2}{E_1\eta_2} + \frac{1}{\eta_1}\right)\sigma' + \frac{1}{E_1}\sigma''. \tag{2}$$

Для случая $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, $E_1 = E_2 = E$ уравнение (2) примет вид

$$\varepsilon'' + \frac{E}{\eta}\varepsilon' = \frac{E}{\eta^2}\sigma + \frac{3}{\eta}\sigma' + \frac{1}{E}\sigma''. \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение для пластической части модели имеет вид

$$\sigma_c - \sigma_0 = \eta_3\varepsilon'. \tag{4}$$

Для случая одноразового статического нагружения уравнение (3) примет вид

$$\varepsilon'' + \frac{E}{\eta}\varepsilon' = \frac{E}{\eta^2}\sigma_c. \tag{5}$$

Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (5) будем искать в виде суммы общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения (ξ) и какого-либо частного решения неоднородного уравнения ($\tilde{\varepsilon}$) [5]

$$\varepsilon = \xi + \tilde{\varepsilon}. \tag{6}$$

Соответствующее (5) однородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\varepsilon'' + \frac{E}{\eta}\varepsilon' = 0. \tag{7}$$

Для выражения (7) характеристическое уравнение имеет вид

$$p^2 + \frac{E}{\eta}p = 0. \tag{8}$$

Корни уравнения (8) равны

$$p_1 = 0;\ p_2 = -\frac{E}{\eta}. \tag{9}$$

Тогда общее решение уравнения (8) будет следующее

$$\xi = C_1 + C_2 e^{p_2 t}. \tag{10}$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения (5) будем искать в виде [5]

$$\tilde{\varepsilon} = At, \tag{11}$$

где $A = const$.

Тогда, подставив $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon}' = A$, $\tilde{\varepsilon}'' = 0$ в уравнение (5), получим

Научно-технический вестник Брянского государственного университета, 2019, №2
Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta, 2019, No.2
DOI: 10.22281/2413-9920-2019-05-02-265-268

$$A=\frac{1}{\eta}\sigma_c. \quad (12)$$

С учетом выражения (12) уравнение (11) примет вид

$$\tilde{\varepsilon}=\frac{1}{\eta}\sigma_c t. \quad (13)$$

Подставим (10), (13) в (6)

$$\varepsilon(t)=C_1+C_2e^{p_2t}+\frac{1}{\eta}\sigma_c t. \quad (14)$$

Для нахождения констант C_1 и C_2 необходимо задаться начальными условиями для ε и ε' в какой-либо известный момент времени *t*. В данном случае происходит быстрое нагружение модели постоянным усилием $\sigma_c=const$, которое в дальнейшем не изменяется. Для этого случая начальными условиями при *t=0* являются значения $\varepsilon(\tau)$ и $\varepsilon'(\tau)$, где τ - бесконечно малая величина.

Рассмотрим начальный момент времени $t_0=0$. Для этого момента справедливы следующие равенства

$$\varepsilon(0)=0;\ \varepsilon'(0)=0;\ \sigma(0)=0;\ \sigma'(0)=0. \quad (15)$$

Дадим времени бесконечно малое приращение $\tau\to 0$ и рассмотрим момент $t_{0+}=t_0+\tau=\tau$. Поскольку приращение τ бесконечно мало, то деформацию можно считать незначительной $\varepsilon(\tau)\to 0$, а усилие в этот момент уже достигает своего предельного значения, т.е.

$$\varepsilon(\tau)=0;\ \sigma(\tau)=\sigma_c;\ \sigma'(\tau)=0. \quad (16)$$

Основное затруднение вызывает нахождение величины $\varepsilon'(t_{0+})=\varepsilon'(\tau)$, которая в данном случае является одним из начальных условий. Для ее нахождения проинтегрируем обе части уравнения (3) на интервале от $t_0=0$ до $t_{0+}=\tau$

$$\varepsilon'(t)\Big|_0^\tau+\frac{E}{\eta}\varepsilon(t)\Big|_0^\tau=\int_0^\tau\frac{E}{\eta^2}\sigma(t)dt+\frac{3}{\eta}\sigma(t)\Big|_0^\tau+\frac{1}{E}\sigma'(t)\Big|_0^\tau. \quad (17)$$

Подынтегральное выражение в правой части уравнения (17) ограничено, следовательно, значения соответствующего интеграла будет тем меньше, чем меньше интервал интегрирования. Поскольку промежуток времени τ бесконечно мал интегралом можно пренебречь. Тогда с учетом (15) и (16) уравнение (17) примет вид

$$\varepsilon'(\tau)=\frac{3}{\eta}\sigma_c. \quad (18)$$

Таким образом, начальные условия следующие: при *t=0*

$$\varepsilon=0,\ \varepsilon'=3\sigma_c/\eta.$$

Продифференцируем (14)

$$\varepsilon'=C_2p_2e^{p_2t}+\frac{1}{\eta}\sigma_c. \quad (19)$$

Подставим полученные начальные условия в уравнения (14) и (19) и получим систему уравнений

$$\begin{cases}0=C_1+C_2;\\ \frac{3}{\eta}\sigma_c=C_2p_2+\frac{1}{\eta}\sigma_c.\end{cases} \quad (20)$$

Из системы уравнений (20) определяем значения искомых констант уравнения (10)

$$C_1=-\frac{2\sigma_c}{\eta p_2};\ C_2=\frac{2\sigma_c}{\eta p_2}. \quad (21)$$

Подставим (21) в (14)

$$\varepsilon_{у-в}(t)=\frac{2\sigma_c}{\eta p_2}\left(e^{p_2t}-1\right)+\frac{\sigma_c}{\eta}t. \quad (22)$$

Далее определим пластическую составляющую деформации $\varepsilon_{пл}$. Для этого из уравнения (4) выразим

$$\varepsilon'=\frac{\sigma_c-\sigma_0}{\eta_3}. \quad (23)$$

Интегрируя выражение (23), получим

$$\varepsilon_{пл}=\frac{\sigma_c-\sigma_0}{\eta_3}t. \quad (24)$$

Подставив выражения (22) и (24) в уравнение (1), получим общую деформацию

$$\varepsilon(t)=\frac{2\sigma_c}{\eta p_2}\left(e^{p_2t}-1\right)+\frac{\sigma_c}{\eta}t+\frac{\sigma_c-\sigma_0}{\eta_3}t, \quad (25)$$

где $p_2=-E/\eta$.

3. Заключение

Таким образом, анализируя поведение реологической модели на бесконечно малом временном промежутке, можно установить начальные условия для последующего решения дифференциального уравнения модели.

DOI: 10.22281/2413-9920-2019-05-02-265-268

Решение дифференциального уравнения используется для прогнозирования и расчета технологических параметров уплотняющей техники исходя из условий ее применения.

Научно обоснованные режимы работы уплотняющих машин позволят повысить качество выполняемых работ по уплотнению асфальтобетонного покрытия, а также снизить затраты на их производство.

Список литературы

1. Дорожный асфальтобетон / Под ред. Л.Б. Гезенцвея. - 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Транспорт, 1985. – 350 с.

2. Богуславский, А.М. Основы реологии асфальтобетона / А.М. Богуславский, Л.А. Богуславский. – М.: Высшая школа, 1972. – 200 с.

3. Руденский, А.В. Реологические свойства битумоминеральных материалов / А.В. Руденский, И.М. Руденская. – М.: Высшая школа, 1971. – 127 с.

4. Рейнер М. Реология / М. Рейнер. – М.: Наука, 1965. – 224 с.

5. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов. Т. 2 / Н.С. Пискунов. – 12-е изд. – М., Наука, 1978. – 576 с.

References

1. *Dorozhnyj asfaltobeton* [Road asphalt concrete]. Moscow, Transport, 1985. 350 p. (In Russian)

2. Boguslavskij A.M., Boguslavskij L.A. *Osnovy reologii asfaltobetona* [Basics of asphalt concrete rheology]. Moscow, Vysshaya shkola, 1972. 200 p. (In Russian)

3. Rudenskij A.V., Rudenskaya I.M. *Reologicheskie svoystva bitumomineralnykh materialov* [Rheological properties of bitumen mineral materials]. Moscow, Vysshaya shkola, 1971. 127 p. (In Russian)

4. Rejner M. *Reologiya* [Rheology]. Moscow, Nauka, 1965. 224 p. (In Russian)

5. Piskunov N.S. *Differentsialnoe i integralnoe ischisleniya dlya VTUZov. T. 2* [Differential and integral calculus for high schools. Vol. 2]. Moscow, Nauka, 1978. 576 p. (In Russian)