

УДК 621.86

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЕ РАСЧЕТЫ В ЗАДАЧАХ ПРОЧНОСТИ ПОДЪЕМНО-ТРАНСПОРТНЫХ МАШИН

Н.А. Титов

Научно-производственное предприятие «Приводные системы»

В статье выполнен обзор основных подходов к расчету подъемно-транспортных машин методом конечных элементов. Приведены основные положения для выполнения нелинейных конечноэлементных расчетов несущих металлоконструкций подъемно-транспортных машин. Рассмотрены алгоритмы построения матриц жесткости нелинейных конечных элементов и алгоритмы численного итерационного интегрирования уравнений. Выполнены расчеты в нелинейной постановке тестовых объектов и ленты подвесного конвейера.

Ключевые слова: грузоподъемная машина, расчет, метод конечных элементов, нелинейная задача.

При проектировании грузоподъемных машин требуется выполнение расчетов на прочность, жесткость, устойчивость, усталостную долговечность. Однако точное решение этих задач в рамках теории упругости для сложных пространственных конструкций получить невозможно. На практике инженерами используются методы сопротивления материалов и строительной механики. Эти методы применимы к простейшим системам. Для анализа напряженно-деформированного состояния сложных пространственных конструкций, состоящих из множества элементов, используются численные методы. Наибольшее распространение получил метод конечных элементов (МКЭ) [1, 2].

Наиболее простые расчетные схемы грузоподъемных машин представляют собой совокупность стержней или балок. Для их расчета используются стержневые конечные элементы [2, 3]. Если стержневые элементы являются абсолютно твердыми телами, соединенными между собой цилиндрическими или призматическими шарнирами, то метод конечных элементов используется для точного вычисления инерционных и прочностных характеристик поперечного сечения стержней [4, 5]. Однако такой подход применим только для предварительных расчетов, так как стержневые конечные элементы не учитывают реальное распределение механических напряжений в конструкции [1, 6].

Несущие металлоконструкции подъемно-транспортных машин, как правило, являются тонкостенными [7, 8]. Тонкостенные элементы моделируются плоскими конечными элементами [1, 2, 8]. Точность результатов расчета существенно зависит от выбранного размера конечных элементов [9, 10]. Характерный размер при расчете кранов-манипуляторов следует принимать равным $(1...2)\delta$, где δ – толщина элементов конструкции [9]. Для мостовых кранов это соотношение может достигать $(5...6)\delta$ [6, 8, 11]. Наиболее точные модели стреловых кранов содержат также подмодели гидроцилиндров и шарниров [2, 9]. Для оценки живучести при расчете необходимо учитывать влияние остаточных сварных напряжений [12].

Для расчета прочности отдельных узлов грузоподъемных машин (крюка, шарнира, зубчатого колеса) используются объемные конечные элементы [2, 8].

При решении большинства задач предполагается, что и перемещения и деформации конструкции малы. Практически это означает, что форма конечных элементов в процессе нагружения не изменяется, для вычисления деформаций можно использовать приближенные линейные зависимости. При точном определении перемещений ряда конструкций может оказаться необходимым учет геометрической нелинейности. Например, мембранные напряжения, которыми обычно пренебрегают при изгибе пластин, могут явиться причиной значительного уменьшения перемещений даже при малых деформациях. С другой стороны, может оказаться, что нагрузка, при которой прогиб увеличивается, достигается быстрее, чем это предсказывается линейной теорией, и может возникнуть ситуация, в которой при продолжающемся деформировании несущая способность будет падать. Это не что иное, как классическая задача устойчивости конструкций. В указанных случаях задача должна решаться в нелинейной постановке [13, 14].

Независимо от того, велики или малы перемещения (деформации), внутренние и внешние силы должны удовлетворять условиям равновесия. Если перемещения определяются конечным числом (узловых) параметров $\{u\}$ то, должно выполняться равенство

$$\{\psi(\{u\})\} = \int_V [\bar{B}]^T \{u\} - \{\bar{R}\} = 0, \quad (1)$$

где $\{\psi(\{u\})\}$ – сумма внешних и внутренних обобщенных сил, а матрица $[\bar{B}]$ зависит от $\{u\}$ и определяется из соотношения

$$d\{\varepsilon\} = [\bar{B}] \cdot d\{u\}.$$

Матрицу $[\bar{B}]$ можно представить в виде

$$[\bar{B}] = [B_0] + [B_L(u)],$$

где $[B_0]$ – матрица, определяющая бесконечно малые деформации, а матрица $[B_L(u)]$ зависит от перемещений. В общем случае $[B_L(u)]$ является линейной функцией перемещений.

Уравнение (1) решается итерационным методом. При использовании метода Ньютона необходимо, найти зависимость между $d\{u\}$ и $d\{\psi\}$ [13, 14]. Варьируя (1) по $d\{u\}$ получаем

$$\begin{aligned} d\{\psi\} &= \int_V d[\bar{B}]^T \{\sigma\} dV + \int_V [\bar{B}]^T d\{\sigma\} dV, \\ d\{\sigma\} &= [D] \cdot d\{\varepsilon\} = [D] \cdot [\bar{B}] \cdot d\{u\}, \\ d[\bar{B}] &= d[B_L]. \end{aligned} \quad (2)$$

Поэтому

$$d\{\psi\} = \int_V d[B_L]^T \cdot \{\sigma\} \cdot dV + [\bar{K}] \cdot d\{u\},$$

где

$$[K] = \int_V [\bar{B}]^T \cdot [D] \cdot [\bar{B}] \cdot dV = [K_0] + [K_L],$$

а $[K_0]$ является обычной матрицей жесткости при малых деформациях, т.к. $[K_0]$ имеет вид

$$[K_0] = \int_V [B_0]^T \cdot [D] \cdot [B_0] \cdot dV.$$

Матрица $[K_L]$ появляется из-за того, что перемещения велики.

$$[K_L] = \int_V [B_0]^T \cdot [D] \cdot [B_L] \cdot dV + \int_V [B_L]^T \cdot [D] \cdot [B_L] \cdot dV + \int_V [B_L]^T \cdot [D] \cdot [B_0] \cdot dV$$

Матрица $[\bar{K}]$ известна как матрица начальных перемещений, матрица больших перемещений и т.п. Эту матрицу можно построить, считая деформации малыми, но учитывая изменения координат элемента при вычислении жесткостей.

Первый член выражения (2) может быть записан в виде

$$\int_V d[B_L]^T \cdot \{\sigma\} \cdot dV = [K_\sigma] \cdot d\{u\},$$

где $[K_\sigma]$ – симметричная матрица, зависящая от величины напряжения (в справедливости этого утверждения, вероятно, лучше всего убедиться на конкретных примерах). Эта матрица известна как матрица начальных напряжений или геометрическая матрица. Таким образом,

$$d\{\psi\} = ([K_0] + [K_\sigma] + [K_L]) \cdot d\{u\} = [K_T] \cdot d\{u\},$$

где $[K_T]$ – полная матрица тангенциальных жесткостей. Она должна быть положительно определенной, чтобы состояние равновесия было устойчивым [13, 14].

Итерационный алгоритм содержит следующие этапы.

1. В качестве первого приближения $\{u\}$ строится линейное решение.
2. С помощью соотношения (1) определяется $\{\psi\}_1$ для заданной матрицы $[B]$ и текущего значения напряжений.
3. Строится матрица $[K_T]$.
4. Определяется поправка $\Delta\{u\}_1 = -[K_T]^{-1}\{\psi\}_1$.
5. Процесс повторяется до тех пор, пока не достигается требуемая точность [13, 14].

Все решения можно находить за один шаг для полной действующей нагрузки. Однако, как и во всех нелинейных задачах, возникает возможность неединственности решения и при этом может быть найдено решение, не имеющее физического смысла. В таких случаях целесообразно задавать нагрузку отдельными приращениями и получать нелинейное решение для каждого приращения. При этом необходимо периодически проверять выполнение условия равновесия с помощью нелинейного соотношения (1) [13, 14].

При построении матрицы жесткости элемента сначала формируется нелинейная матрица градиента. Вектор полной трехмерной деформации можно представить через компоненты бесконечно малой и большой деформаций

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + \{\varepsilon^L\}$$

где

$$\{\varepsilon^0\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^T.$$

Нелинейные члены запишем в следующем виде:

$$\{\varepsilon^L\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \{\theta_x\}^T & 0 & 0 \\ 0 & \{\theta_y\}^T & 0 \\ 0 & 0 & \{\theta_z\}^T \\ 0 & \{\theta_z\}^T & \{\theta_y\}^T \\ \{\theta_z\}^T & 0 & \{\theta_x\}^T \\ \{\theta_y\}^T & \{\theta_x\}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\theta_x\} \\ \{\theta_y\} \\ \{\theta_z\} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [A] \cdot [\theta],$$

где

$$\{\theta_x\}^T = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad \{\theta_y\}^T = \left[\frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right], \quad \{\theta_z\}^T = \left[\frac{\partial u}{\partial z} \quad \frac{\partial v}{\partial z} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \right].$$

$$d\{\varepsilon^L\} = \frac{1}{2} d[A] \cdot \{\theta\} + \frac{1}{2} [A] \cdot d\{\theta\} = [A] \cdot d\{\theta\} \quad [13; 14].$$

Вектор $\{\theta\}$ можно выразить через функцию формы $[N]$ и узловые перемещения $\{u\}$ следующим образом

$$\{\theta\} = [G]\{u\},$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} d\{\varepsilon^L\} &= [A] \cdot [G] \cdot d\{u\}, \\ [B_L] &= [A] \cdot [G] \quad [13; 14]. \end{aligned}$$

Нелинейную матрицу жесткости (зависящую от перемещений) можно получить согласно выражению

$$[K_L] = \int_V [B_L]^T \cdot [D] \cdot [B_L] \cdot dV.$$

Для получения полной матрицы тангенциальных жесткостей необходимо построить матрицу начальных напряжений $[K_\sigma]$.

$$[K_\sigma] \cdot d\{\sigma\} = \int_V d[B_L]^T \{\sigma\} dV = \int_V [G]^T d[A]^T \{\sigma\} dV.$$

$$d[A]^T \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x I_3 & \tau_{xy} I_3 & \tau_{xz} I_3 \\ \dots & \sigma_y I_3 & \tau_{yz} I_3 \\ \dots & \dots & \sigma_z I_3 \end{bmatrix} \cdot d\{\theta\} = [M] \cdot [G] \cdot d\{u\},$$

где I_3 – единичная матрица размера 3x3 [13; 14].

Окончательно получаем

$$[K_\sigma] = \int_V [G]^T [M] \cdot [G] \cdot dV.$$

Полную матрицу тангенциальных жесткостей получаем простым суммированием трех матриц $[K_0]$, $[K_L]$ и $[K_\sigma]$ [13, 14].

С использованием приведенных зависимостей выполним расчет тестовой задачи, расчетная схема которой приведена на рис. 1. Здесь цифрами обозначены номера узлов конечноэлементной сетки. Сила $P=1$. Материал конструкции – сталь.

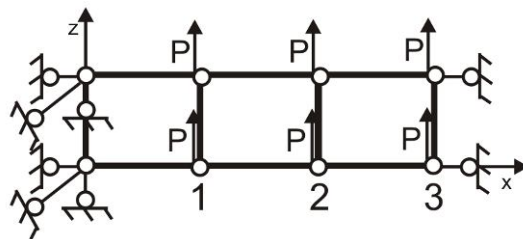


Рис. 1. Расчетная схема тестовой задачи

Результаты расчета показаны на рис. 2 и рис. 3. Видно, что с 4 итерации линейное и нелинейное решения начинают существенно расходиться. Итоговая разница (после 10 итераций) достигает 19,6%. Максимальная нелинейная деформация (в узле №3) достигает 7,22 мм, что совпадает с аналитическим решением нелинейной задачи.

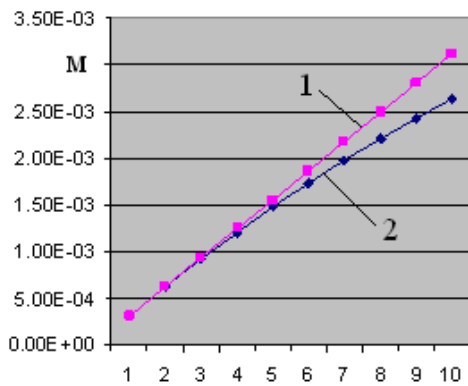


Рис. 2. Зависимость перемещения от нагрузки для узла №1:
1 – линейное решение;
2 – нелинейное решение

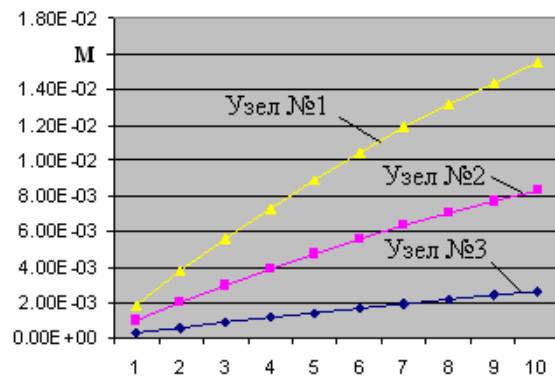


Рис. 3. Перемещения трех узлов тестовой расчетной схемы

Ленточные конвейеры, на протяжении многих лет находили широкое применение в промышленности, строительстве, сельском хозяйстве, пищевых производствах и других отраслях промышленности. Предложены современные конструкции ленточных конвейеров с распределенным приводом (рис. 4) [15, 16]. При расчете конвейерной ленты, появляется необходимость решения геометрически нелинейной задачи, так как прогиб ленты под нагрузкой может достигать больших величин.

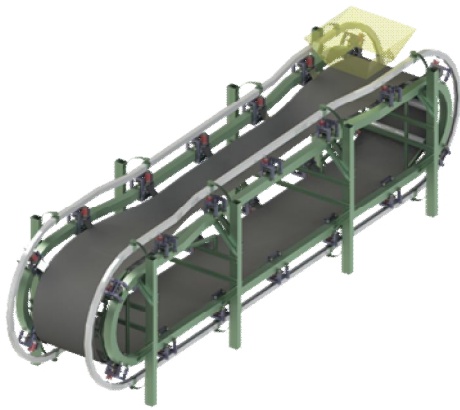


Рис. 4. Общий вид конвейера с распределенным приводом [16]

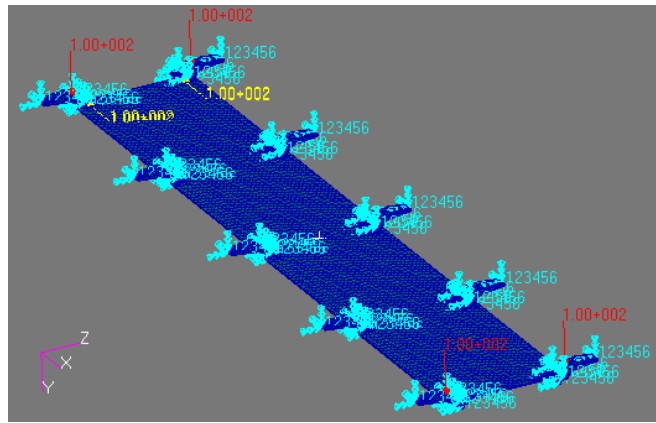
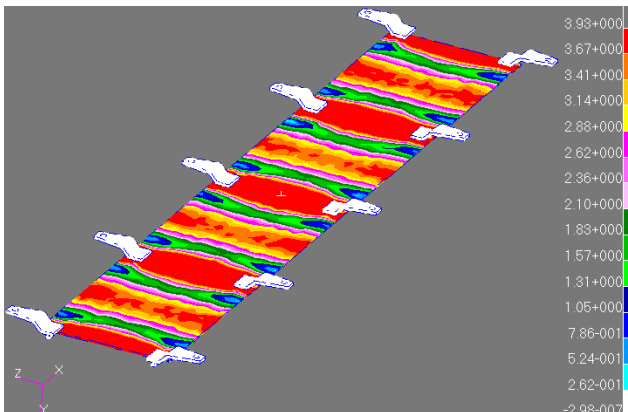


Рис. 5. Расчетная конечноэлементная модель участка конвейерной ленты

Расчетная конечноэлементная схема участка конвейерной ленты рассматриваемого конвейера приведена на рис. 5. Исходные данные для решения задачи: усилие натяжения ленты – 100 Н, вертикальная нагрузка со стороны груза – 550 Н/м. Весовая нагрузка определяется автоматически с учетом заданной величины ускорения свободного падения $9,81 \text{ м/с}^2$. Скорость движения ленты 0,5 м/с. Материал креплений – сталь. Упругие характеристики конвейерной ленты приняты на основании данных [17]. Исходное число ступеней приложения внешней нагрузки – 10. Результаты расчета приведены на рис. 6 и 7.

а)



б)

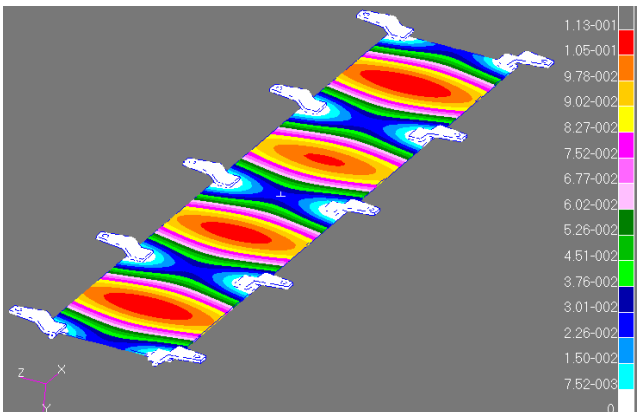


Рис. 6. Результаты нелинейного расчета участка конвейерной ленты (100% нагрузки): а – напряжения (МПа), б – вертикальные перемещения (мм)

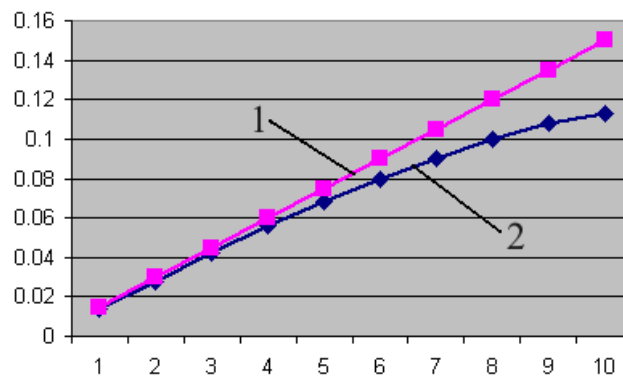


Рис.7. Зависимость максимального перемещения от нагрузки: 1 – линейное решение; 2 – нелинейное решение

Результаты расчетов показывают, что применение линейных зависимостей и расчетных схем в тех случаях, когда задача является нелинейной, приводит к значительным погрешностям в расчетах (20-30%). Если по результатам первичного расчета в конструкции наблюдаются большие деформации или напряжения, превосходящие предел текучести материала, необходимо повторно решить задачу в нелинейной постановке. Дальнейшие исследования будут посвящены нелинейному моделированию напряженно-деформированного состояния лент конвейеров с распределенным приводом.

Список литературы

1. Лагерев, И.А. Расчеты грузоподъемных машин методом конечных элементов // И.А. Лагерев. - Брянск: БГТУ, 2013. - 116 с.
2. Вершинский, А.В. Численный анализ металлических конструкций подъемно-транспортных машин / А.В. Вершинский, И.А. Лагерев, А.Н. Шубин, А.В. Лагерев. - Брянск: БГУ, 2014. - 186 с.
3. Бословяк, П.В. Реализация методики оптимального проектирования металлоконструкции конвейера с подвесной лентой / П.В. Бословяк, Е.П. Зуева // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. - 2016. - № 1. - С. 37-45.
4. Lagerev A.V., Lagerev I.A., Milto A.A. Tool for Preliminary Dynamics and Stress Analysis of Articulating Cranes, *International Review on Modelling and Simulations*, 2014, Vol. 7, No. 4, pp. 644-652.
5. Лагерев, А.В. Универсальная методика определения напряжений в стержневых элементах конструкций гидравлических кранов-манипуляторов в задачах динамики / А.В. Лагерев, И.А. Лагерев, А.А. Мильто // Вестник Брянского государственного университета. - 2013. - № 4. - С. 21-26.
6. Толоконников, А.С. Потенциальные места разрушения несущих металлоконструкций мостовых кранов / А.С. Толоконников, Г.В. Селиверстов, И.Ю. Выборнов // Тяжелое машиностроение. - 2007. - № 3. - С. 37-39.
7. Александров, М.П. Грузоподъемные машины / М.П. Александров. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана/ - Высшая школа, 2000. - 552 с.
8. Соколов, С.А. Металлические конструкции подъемно-транспортных машин / С.А. Соколов. - СПб.: Политехника, 2005. - 423 с.
9. Лагерев, И.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния крана-манипулятора машины для сварки трубопроводов / И.А. Лагерев // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. - 2011. - №4. - С. 29-36.
10. Лагерев, А.В. Оптимизация конструкции крана-манипулятора машины для сварки магистральных трубопроводов при модернизации / А.В. Лагерев, И.А. Лагерев // Подъемно-транспортное дело. - 2013. - №3. - С. 7-10.
11. Попов, В.Г. Дефекты металлоконструкций литейных кранов и пути их устранения / В.Г. Попов, Д.Ф. Габтыкаев // Безопасность труда в промышленности. - 2009. - №4. - С. 18-20.
12. Вершинский, А.В. Расчетное определение напряжений в несущих элементах подъемно-транспортных машин, работающих на больших глубинах / А.В. Вершинский, А.Н. Шубин // Механизация строительства. - 2013. - № 6. - С. 22-26.
13. Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы / Р.Галлагер. - М.: Мир, 1975. - 428 с.
14. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О.Зенкевич. - М.: Мир, 1975. - 540 с.
15. Лагерев, А.В. Динамические процессы при переходных режимах работы дискретного участка конвейера с распределенным приводом / А.В. Лагерев, Д.Ю. Кулешов // Вестник Брянского государственного технического университета. - 2013. - № 2. - С. 50-56.
16. Толкачев, Е.Н. Анализ динамики подвесок дискретного участка конвейера с подвесной лентой и распределенным приводом / Е.Н. Толкачев // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. - 2015. - № 1. - С. 55-64.

17. Пешков, С.В. Определение специальных характеристик элементных составляющих конвейерных лент / С.В. Пешков // Вестник Кузбасского государственного технического университета. - 2010. - №1. - С. 136-138.

Сведения об авторе

Титов Николай Алексеевич – кандидат технических наук, ведущий инженер Научно-производственного предприятия «Приводные системы» (г. Комсомольск-на-Амуре), *titov5910@yandex.ru*.

NONLINEAR FINITE ELEMENT CALCULATIONS IN PROBLEMS OF STRENGTH OF LIFTING-TRANSPORT MACHINES

N.A. Titov

Scientific production enterprise «Privodnye Sistemy»

The main approaches to lifting-transport machines simulation by finite elements method are under consideration in this article. Contains general provisions for performing nonlinear finite element calculations of load-bearing metal structures of handling machines. The algorithms of constructing stiffness matrices of nonlinear finite element and iterative algorithms for the numerical integration of the equations are shown. These are results of nonlinear simulation of the test objects and the overhead conveyor belt.

Keywords: *hoisting machine, finite element method, nonlinear problem, conveyor belt*

References

1. Lagerev I.A. *Raschety gruzopodemnykh mashin metodom konechnykh elementov* [Lifting and transport machines finite-elements simulation]. Bryansk, Bryanskiy Gosudarstvennyy Tekhnicheskii Universitet, 2013. 116 p.
2. Verшинский A.V., Lagerev I.A., Shubin A.N., Lagerev A.V. *Chislennyy analiz metallicheskiykh konstruktsey pod'yemno-transportnykh mashin* [Numerical analysis of metal constructions of lifting-transport machines]. Bryansk, Bryanskiy Gosudarstvennyy Universitet, 2014. 186 p.
3. Boslovyak P.V., Zueva E.P. Realization methodology for optimal design of steel structures conveyors with hanging belt, *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2016, No.1, pp. 37-45. Available at: <http://ntv-brgu.ru/wp-content/arhiv/2016-N1/2016-01-04.pdf>.
4. Lagerev A.V., Lagerev I.A., Milto A.A. Tool for Preliminary Dynamics and Stress Analysis of Articulating Cranes, *International Review on Modelling and Simulations*, 2014, Vol. 7, No. 4, pp. 644–652.
5. Lagerev A.V., Lagerev I.A., Milto A.A. Universal technique for stress analysis of beam elements of articulating cranes in case of dynamic load, *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2013, No.4, pp. 21-26.
6. Tolokonnikov A.S. Potentsialnye mesta razrusheniya nesushchikh metallokonstruktsey mostovykh kranov, *Tyazholoe mashinostroenie*, 2007, No.3, pp. 37-39.
7. Aleksandrov M.P. *Gruzopodemnye mashiny* [Lifting-transport machines]. Moscow, MGTU imeni N.E. Baumana, 2000. 552 p.
8. Sokolov S.A. *Metallicheskie konstruktseyi podemno-transportnykh mashin* [Lifting-transport machines metall constructions]. SPb, Politekhnik, 2005. 423 p.
9. Lagerev I.A. Simulation of stress-strain state in crane-manipulator of pipeline welding machine, *Izvestiya vyshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie*, 2011, No.4, pp. 29-36.
10. Lagerev A.V., Lagerev I.A. Trunk pipeline welding machine crane-manipulator optimization during its modernization, *Podyemno-transportnoe delo*, 2013, No.3, pp. 7-10.

11. Popov V.G, Gabtykaev D.F. Defekty metallokonstruktsiy liteynykh kranov I puti ikh us-traneniya, *Bezopasnost truda v promyshlennosti*, 2009, No.4, pp. 18-20.
12. Vershinckiy A.V., Shubin A.V. Raschetnoe opredelenie napryazheniy d nesushchikh elementakh podemno-transportnykh mashin, rabotayushchikh na bolshikh glubinakh, *Nekhanizat-siya stroitelstva*, 2013, No.6, pp. 22-26.
13. Gallager R. *Metod konechnykh elementov* [Finite element method]. Moscow, Mir, 1975. 428 p.
14. Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [Finite element method in engi-neering]. Moscow, Mir, 1975. 540 p.
15. Lagerev A.V., Kuleshov D.Yu. Dynamic processes of discrete section of a conveyor with suspended belt and distributed drive at transient state of work, *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2013, No.2, pp. 50-56.
16. Tolkachev E.N. Analysis of the dynamics of suspensions of discrete section of the con-veyor with suspended belt and distributed drive, *Nauchno-tekhnicheskyy vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2015, No.1, pp. 55-64. Available at: <http://ntv-brgu.ru/wp-content/arhiv/2015-N1/2015-01-10.pdf>.
17. Peshkov S.V. Opredelenie spetsialnykh kharakteristik elementnykh sostavlyayushchikh konveyernykh lent, *Vestnik kuzbasskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2010, No.1, pp. 136-138.

Author' information

Nikolay A. Titov - Candidate of technical Sciences, Lead engineer of Scientific production enterprise «Privodnye sistemy» (Komsomolsk-on-Amur), titov5910@yandex.ru.