

УДК (UDC) 621.86

ИЗМЕНЕНИЕ НАГРУЖЕННОСТИ СТРЕЛОВОГО КРАНА ПРИ ПРОВЕДЕНИИ  
ПОГРУЗОЧНО-РАЗГРУЗОЧНЫХ РАБОТCHANGING THE LOAD OF A ARROW CRANE WHILE CARRYING OUT LOADING  
AND UNLOADING WORKSСладкова Л.А., Крылов В.В., Горелова М.В.  
Sladkova L.A., Krylov V.V., Gorelova M.V.Российский университет транспорта (Москва, Россия)  
Russian University of Transport (Moscow, Russian Federation)

**Аннотация.** Устойчивость стреловых самоходных кранов является ключевой задачей в процессе их эксплуатации. Разработанная расчетная схема стрелового самоходного крана и ограничения, накладываемые на ее перемещения во времени и пространстве, позволили получить математические зависимости траектории движения центра тяжести стрелы, изменение скорости его перемещения при произвольном повороте стрелы, а также кинематические и энергетические характеристики перемещения груза при совмещении операций в процессе работы крана. Совмещение операций подъема-опускания груза и разворота к месту выгрузки способствует повышению производительности при эксплуатации стреловых самоходных кранов. Полная энергия системы (крановой конструкции) при рассматриваемых условиях эксплуатации зависит не только от положения центра тяжести стрелы и груза, а также от угла наклона стрелы к горизонту. При этом зависимость величины полной энергии системы от углов поворота как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях является прямо пропорциональной. Полученные в результате теоретических исследований зависимости позволяют определить энергию, затрачиваемую на подъем-опускание груза и траекторию его перемещения в пределах изменения угла поворота стрелы в вертикальной плоскости.

**Ключевые слова:** нагруженность, стреловой кран, устойчивость, траектория движения.

**Дата принятия к публикации:** 27.04.2020  
**Дата публикации:** 25.06.2020

**Сведения об авторах:**

**Сладкова Любовь Александровна** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Наземные транспортно-технологические средства» ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта», e-mail: rich.cat2012@yandex.ru.

**Крылов Вадим Викторович** – аспирант кафедры «Наземные транспортно-технологические средства» ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта», e-mail: vadimkrylov96@yandex.ru.

**Горелова Мария Витальевна** – магистр кафедры «Наземные транспортно-технологические сред-

**Abstract.** The stability of self-propelled jib cranes is a key task in the process of their operation. The developed calculation scheme of the arrow self-propelled crane and the restrictions imposed on its movement in time and space, allowed to obtain mathematical dependence of the trajectory of the center of gravity of the arrow, a change in the speed of its movement at the arbitrary turn of the arrow, as well as cinematic and energy characteristics of the movement of cargo when combining operations during the operation of the crane. The combination of lifting and lowering cargo and a turn to the unloading place helps to increase productivity during the work of self-propelled jib cranes. Moreover, the full energy of the system (crane structure) depends not only on the position of the center of gravity of the arrow and cargo, but also on the angle of the arrow to the horizon. Moreover, the amount of full energy of the system is directly proportional to the angle of rotation in vertical and horizontal planes. The resulting theoretical dependence studies allow to determine the energy spent on lifting and lowering the load and the trajectory of its movement within the change of the angle of the arrow in the vertical plane.

**Keywords:** load, arrow crane, stability, trajectory.

**Date of acceptance for publication:** 27.04.2020  
**Date of publication:** 25.06.2020

**Authors' information:**

**Lubov A. Sladkova** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department “Ground transportation and technological means” at Russian University of Transport, e-mail: rich.cat2012@yandex.ru.

**Vadim V. Krylov** – Graduate student of the Department “Ground transportation and technological means” at Russian University of Transport, e-mail: vadimkrylov96@yandex.ru.

**Maria V. Gorelova** – Master of the Department “Ground transportation and technological means” at

ства» ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта», e-mail: marusalen@mail.ru.

‡ Russian University of Transport,  
 ‡ e-mail: marusalen@mail.ru.

## 1. Введение

Расчетная схема любой конструкции и ограничения, накладываемые на ее перемещения в пространстве и времени, во многом определяют изменение степени ее нагруженности, которая влияет на устойчивую работу всей системы. Типовая расчетная схема стрелового самоходного крана при проведении погрузочно-разгрузочных работ представлена на рис. 1.

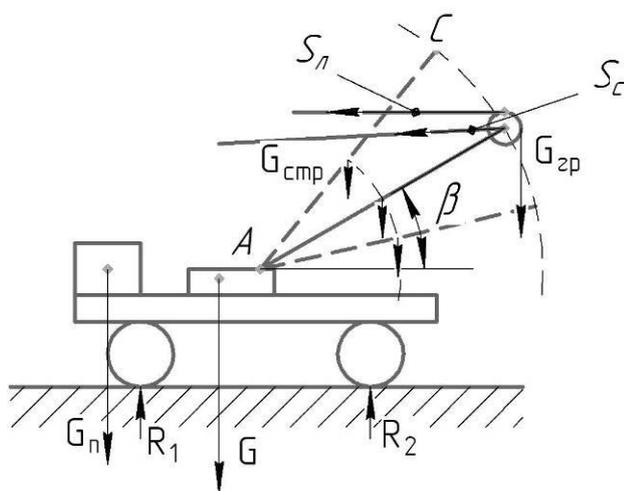


Рис. 1. Расчетная схема стрелового самоходного крана

При ее разработке учитывался рабочий процесс машины, связанный с совмещением операций подъема-опускания груза и разворота стрелы к месту выгрузки. С одной стороны, такое совмещение способствует повышению производительности труда, а с другой ведет к увеличению нагруженности элементов металлоконструкции стрелы из-за возникновения дополнительных динамических нагрузок. На рис. 1 видно, что перемещение центра тяжести стрелы в проекции на горизонтальную ось  $x$  будет изменяться в зависимости от угла  $\beta$ . В соответствии с этим будут изменяться и величины опорных реакций под опорами.

Из теории расчета крановых конструкций известно, что в вертикальной плоскости на стрелу действуют силы тяжести груза  $G_{cp}$  и элементов конструкции - противовеса  $G_n$ ,

стрелы  $G_{cmp}$ , крановой тележки  $G$ , силы реакций  $R_1, R_2$  со стороны грунта на опоры, (ходовое оборудование), усилия в грузовом канате  $S_n$  и канате подъема стрелы  $S_c$ . В горизонтальной плоскости – это силы инерции со стороны стрелы и груза и ветровые нагрузки. Как правило, расчет крановых конструкций ведется при самом неблагоприятном сочетании нагрузок - в статическом режиме нагружения при заданной грузоподъемности. Угол наклона стрелы к горизонту  $\beta$  выбирается, как правило, по грузовой характеристике крана [1].

## 2. Исследование кинематических и энергетических характеристик системы

Задачу по определению изменения нагруженности стрелы крана и совокупного с ней оборудования при оценке устойчивости работы крана при совмещении операций при проведении погрузочно-разгрузочных работ решим методами аналитической механики. Для этого стрелу крана (рис. 2) представим в виде стержня, наклоненного под углом  $\beta$  к горизонту (оси  $x$ ), который вращается вокруг вертикальной оси  $z$ . Отклонение при вращении в произвольный момент времени от оси  $x$  на угол  $\beta$  происходит одновременно с изменением угла  $\alpha$ , который характеризует отклонение (подъем-опускание) стрелы от начального положения в вертикальной плоскости (рис. 2).

Очевиден факт изменения нагруженности стрелы крана при изменении угла ее поворота  $\alpha$  относительно вертикальной оси.

Для построения траекторий движения точек стрелы при совмещении операций во время погрузочно-разгрузочных работ крана, т.е. при одновременном изменении углов  $\alpha$  и  $\beta$ , использовался графоаналитический метод. Видно, что рассматриваемые точки перемещаются по поверхностям сфер (рис.3).

Для нахождения траектории перемещения точек системы, т.е. для определения характера движения точек системы, показан-

ной на рис. 2 представленную задачу, решим методами аналитической механики. Очевидно, что представленная на рис. 2 система имеет три степени свободы. Ее обобщенными координатами в полярной системе координат являются величины  $r, \alpha, \beta$ .

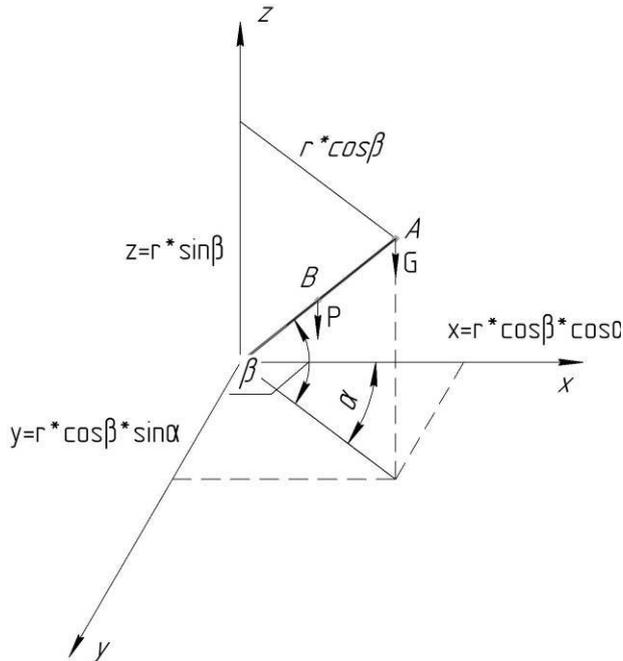


Рис.2. Расчетное положение стрелы крана в сферической системе координат

Для нахождения траектории перемещения точек системы, т.е. для определения характера движения точек системы, показанной на рис. 2, представленную задачу решим методами аналитической механики. Очевидно, что представленная на рис. 2 система имеет три степени свободы. Ее обобщенными координатами в полярной системе координат являются величины  $r, \alpha, \beta$ .

Из курса теоретической механики известно, что кинетическая энергия системы равна [2, 3]:

$$T = T_{cmp} + T_{zp},$$

где  $T_{cmp}$ , – кинетическая энергия перемещения центра тяжести стрелы;  $T_{zp}$  – кинетическая энергия перемещения центра тяжести груза, закрепленного на конце стрелы.

С другой стороны, учитывая инерционность системы, скоростей подъема-опускания груза и поворота стрелы в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рис.2), получим

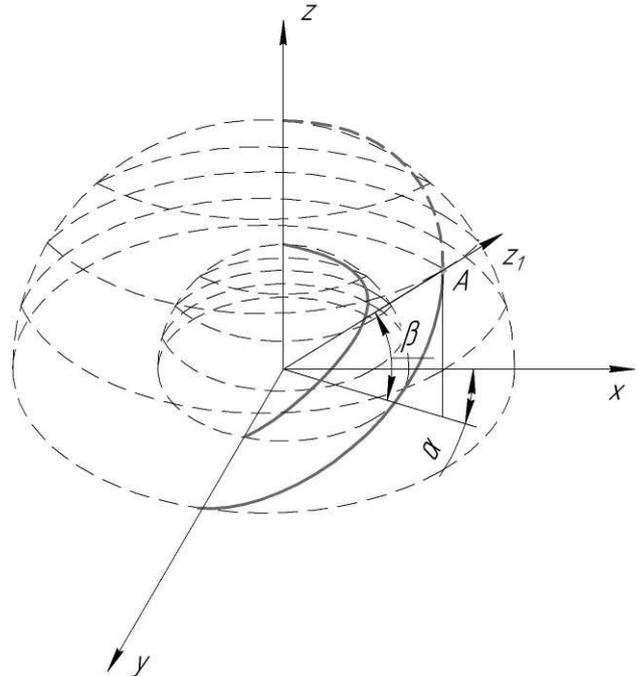


Рис. 3. Траектории движения центра тяжести стрелы и оголовка стрелы

$$T_{zp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_z \cdot \omega_z^2 + I_x \cdot \omega_x^2 + I_y \cdot \omega_y^2 - \\ - 2 \cdot I_{yz} \cdot \omega_y \cdot \omega_z - 2 \cdot I_{xz} \cdot \omega_x \cdot \omega_z - \\ - 2 \cdot I_{xy} \cdot \omega_x \cdot \omega_y \end{pmatrix},$$

где  $I_z, I_y, I_x$  – осевые моменты инерции стрелы на рис. 2;  $I_{yz}, I_{xz}, I_{xy}$  – центробежные моменты инерции стрелы.

Стрела крана симметрична относительно оси, совпадающей с осью ее симметрии, тогда ее центробежный момент инерции равен 0, т.е.  $I_{yz} = I_{xz} = I_{xy} = 0$ .

Тогда кинетическая энергия стрелы будет равна

$$T_{zp} = \frac{I_z \cdot \omega_z^2 + I_x \cdot \omega_x^2 + I_y \cdot \omega_y^2}{2}. \quad (1)$$

Запишем кинетическое уравнение Эйлера при вращении стержня (рис. 3) в трехмерном пространстве. Учитывая симметричность сечения, т.е. при  $I_x = I_y$ , получим:

$$\begin{cases} \omega_x^2 + \omega_y^2 = \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + \dot{\beta}^2 \\ \omega_z = \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + \dot{\beta} \cdot \dot{\alpha} \end{cases}. \quad (2)$$

Подставив выражение (2) в (1), получим:

$$T_{cp} = \frac{(I_x[\omega_x^2 + \omega_y^2] + I_z \cdot \omega_z^2)}{2} = \frac{1}{2} \left[ I_x(\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + \dot{\beta}^2) + I_z(\dot{\alpha} \cdot \cos \beta + \dot{\beta} \cdot \dot{r})^2 \right] \quad (3)$$

Здесь величины  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{r}$  характеризуют скорости изменения углов поворота и подъема, и изменения положения центра тяжести в неустановившемся режиме движения.

Потенциальная энергия системы, изображенной на рис. 1, равна:

$$\begin{aligned} \Pi &= m_{cp} \cdot g \cdot z + m_{cmp} \cdot g \cdot \frac{z}{2} = \\ &= g \cdot r \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \left( m_{cp} + \frac{m_{cmp}}{2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $z = r$  – координата положения центра тяжести стрелы по радиус-вектору  $r$ . Для заданного типа стрелы  $r = \text{const}$ .

Уравнение Лагранжа в общем виде представим как сумму кинетической и потенциальной энергий:

$$\begin{aligned} L &= T - \Pi = \\ &= \frac{1}{2} \left[ I_x(\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + \dot{\beta}^2) + I_z(\dot{\alpha} \cdot \cos \beta + \dot{\beta} \cdot \dot{r})^2 \right] + \\ &+ g \cdot r \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \left( m_{cp} + \frac{m_{cmp}}{2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Для нахождения величин  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{r}$  воспользуемся решением, приведенным в [4-6].

Здесь

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \sqrt{\frac{2}{I_x} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1 \cos \beta}{I_x^2 \sin^2 \beta} - \frac{2mgh \cos \beta}{I_x}} \\ \dot{\alpha} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1 \cos \beta}{I_x \sin^2 \beta} \\ \dot{r} = \frac{\alpha_1}{I_x} - \frac{(\alpha_2 - \alpha_1 \cos \beta) \cos \beta}{I_x \sin^2 \beta} \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\alpha_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (7)$$

Здесь  $q_i$  – текущая координата величин  $r, \alpha, \beta$ , изменяющаяся во времени  $t$ .

Тогда в общем виде величины  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  будут равны [5, 7, 8]:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= I_z(\dot{\alpha} \cdot \cos \beta + \dot{\beta} \cdot \dot{r})^2; \\ \alpha_2 &= \dot{\alpha} \cdot I_x \sin^2 \beta + I_z(\dot{\alpha} \cdot \cos \beta + \dot{r}) \cos \beta. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив значения в выражении (8) в (6), получим

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{I_z}{I_x}(\dot{\alpha} \cdot \cos \beta + \dot{r}) \left[ 1 + \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} \right] - \\ &- \left[ \dot{\alpha} + \frac{I_z \cos \beta}{I_x \sin^2 \beta}(\dot{\alpha} \cdot \cos \beta + \dot{r}) \right] \\ \dot{\alpha} &= \frac{(\dot{\alpha} \cdot I_x \sin^2 \beta + I_z(\dot{\alpha} \cdot \cos \beta + \dot{r}) \cos \beta)}{I_x \sin^2 \beta} + \\ &+ \frac{I_z(\dot{\alpha} \cdot \cos \beta + \dot{r}) \cos^2 \beta}{I_x \sin^2 \beta}. \end{aligned} \quad (9)$$

С другой стороны, скорость перемещения центра тяжести при произвольном повороте стрелы будет равна:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + r^2 \dot{\beta}^2. \quad (10)$$

Известно, что этим координатам соответствуют импульсы сил  $p_r, p_\alpha, p_\beta$ , которые в проекции на полярные координаты представим в виде [2, 9, 10]:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}}; p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}; p_\beta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}}. \quad (11)$$

В свою очередь, кинетическая энергия  $T$  равна:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (12)$$

Используя (11) и (12), определим величины импульсов сил:

$$\begin{cases} p_r = m \cdot \dot{r} \\ p_\alpha = m \dot{r}^2 \sin^2 \beta \\ p_\beta = m r^2 \dot{\beta} - I_\beta \dot{\beta} \end{cases} \quad (13)$$

Откуда:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\alpha} = \frac{p_\alpha}{m \dot{r}^2 \sin^2 \beta} \\ \dot{\beta} = \frac{p_\beta}{m r^2 - I_\beta} \end{cases} \quad (14)$$

Потенциальная энергия равна

$$\Pi = m \cdot g \cdot r \cdot \cos \beta. \quad (15)$$

Полная механическая энергия системы равна

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + r^2 \dot{\beta}^2) + m \cdot g \cdot r \cdot \cos \beta. \quad (16)$$

Тогда с учетом (10), (12), (14) и (15) полная энергия системы будет равна

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\alpha^2}{r^2 \sin^2 \beta} + \frac{p_\beta^2}{r^2} \right). \quad (17)$$

Учитывая, что импульс силы равен

$$\begin{cases} \dot{p}_x = m\ddot{x} \\ \dot{p}_y = m\ddot{y} \\ \dot{p}_z = m\ddot{z} \end{cases}. \quad (18)$$

При переходе к декартовым системам координат получим изменение скоростей перемещения стрелы крана с грузом

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} \\ \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} \end{cases}. \quad (19)$$

Для упрощения выражение (13) подставим в уравнение (17). Величина полной энергии системы будет равна

$$H = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \beta + \dot{\beta}^2). \quad (20)$$

Из выражений (9) и (20) видно, полная энергия системы зависит от положения центра тяжести стрелы и груза (рис. 3), а также от угла наклона стрелы к горизонту. Причем величина полной энергии системы связана прямо пропорциональной зависимостью с углом  $\beta$ , положением центра тяжести стрелы и углом ее наклона к оси вращения. Очевидно, что при увеличении угла  $\beta$  и линейных параметров стрелы увеличивается величина полной энергии системы.

Очевидно, что для снижения полной энергии необходимо чтобы величина  $\beta$  стремилась к нулю. Исходя из этих положений, при горизонтальном расположении стрелы (башенный кран), т.е. при  $\beta = 0$ , величина полной энергии стрелы крана будет равна:

$$H = \frac{1}{2} \dot{r}^2. \quad (21)$$

Пример аналогичной задачи разобран в [5]. Траектория движения точки по поверхности сферы (рис. 3) определяется из уравнения движения

$$\frac{r\dot{\beta}}{r \cos \gamma \dot{\beta}} = ctg \gamma, \quad (22)$$

где  $\gamma$  – угол, образованный скоростью с меридианом (является постоянной величиной [5]).

Решение дифференциального уравнения при начальных условиях (при  $t = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 0$ ) позволяет получить выражение

$$\int_0^\beta \frac{d\beta}{\cos \beta} = ctg \gamma \int_0^\alpha d\alpha. \quad (23)$$

Откуда

$$\ln tg \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) = ctg \alpha \gamma \quad (24)$$

или

$$tg \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) = \exp(\alpha \gamma). \quad (25)$$

Таким образом, полученные зависимости (20) и (25) позволяют определить энергию, затрачиваемую на подъем-опускание груза и траекторию его перемещения (рис. 4) в пределах изменения углов  $\alpha$  при заданных выше граничных условиях.

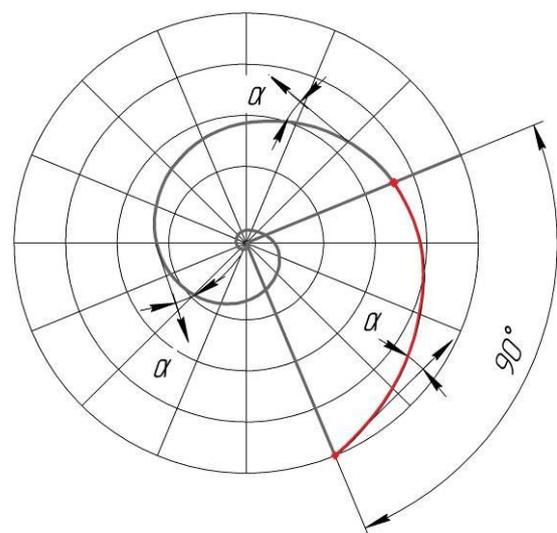


Рис. 4. Траектории движения центра тяжести стрелы и оголовка стрелы, вид сверху

Кроме того, полученные зависимости позволяют более точно оценивать распределение усилий под опорами крана при повороте его стрелы в вертикальной плоскости и в связи с этим разрабатывать рекомендации по разработке автоматических систем слежения за устойчивой работой стреловых самоходных кранов.

Полученная зависимость (25) соответствует графической интерпретации [6] и позволяет определять кинематические характеристики перемещения груза при совмещении операций в процессе работы крана.

#### 4. Заключение

При проведении теоретических исследований было установлено, что полная энергия системы зависит от положения центра тяжести стрелы и угла наклона стрелы к горизонту. Величина полной энергии системы прямо пропорциональна изменению угла наклона стрелы в вертикальной плоскости, положе-

нию центра тяжести стрелы и угла ее поворота в горизонтальной плоскости. При увеличении угла наклона стрелы в вертикальной плоскости и ее линейных параметров увеличивается величина полной энергии системы.

Полученные аналитические зависимости позволяют:

- изучить траекторию движения характерных точек стрелы крана, что дает возможность оценить кинематику и динамику ее движения, влияющих на устойчивую работу крана в целом;

- определить кинематические характеристики перемещения груза при совмещении операций в процессе работы крана;

- оценивать с высокой точностью распределение усилий под опорами крана при повороте его стрелы в вертикальной плоскости;

- разрабатывать рекомендации по созданию автоматических систем слежения за устойчивой работой стреловых самоходных кранов.

#### Список литературы

1. Александров М.П. Грузоподъемные машины. М.: МГТУ; Высшая школа, 2000. 552 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высш. шк., 1990. 607 с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высш. шк., 2010. 416 с.
4. Яблонский А.Я. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. М.: Интеграл-Пресс, 2002. 384 с.
5. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т.1. М.: Наука, 1972. 512 с.
6. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т.2. М.: Наука, 1972. 542 с.
7. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т.2. СПб.: Лань, 2008. 544 с.
8. Файн А.М. Сборник задач по теоретической механике. М.: Высш. шк., 1978. 190 с.
9. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы.

#### References

1. Aleksandrov M.P. *Gruzopodemnye mashiny* [Lifting-transport machines]. Moscow, MGTU, 2000. 552 p. (In Russian)
2. Nikitin N.N. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki* [Course of Theoretical Mechanics]. Moscow, Vysshaya shkola, 1990. 607 p. (In Russian)
3. Targ S.M. *Kratkiy kurs teoreticheskoy mekhaniki* [Short course of theoretical mechanics]. Moscow, Vysshaya shkola, 2010. 416 p. (In Russian)
4. Yablonsky A.Ya. *Sbornik zadaniy dlya kursovykh rabot po teoreticheskoy mekhanike* [Collection of tasks for course work by theoretical mechanics]. Moscow, Integral-Press, 2002. 384 p. (In Russian)
5. Bat M.I. *Teoreticheskaya mekhanika v primerakh i zadachakh* [Theoretical mechanics in examples and tasks. In 2 volumes. Vol. 1]. Moscow, Nauka, 1972. 512 p. (In Russian)
6. Bat M.I. *Teoreticheskaya mekhanika v primerakh i zadachakh* [Theoretical mechanics in examples and tasks. In 2 volumes. Vol. 2]. Moscow, Nauka, 1972. 542 p. (In Russian)

