

УДК (UDC) 621.86

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ ЧАСТОТНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ
ГИДРОПРИВОДА МАНИПУЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМ МОБИЛЬНЫХ МАШИНSYNTHESIS OF OPTIMAL LAWS FOR FREQUENCY-ADJUSTABLE
HYDRAULIC DRIVES OF MANIPULATION SYSTEMS OF MOBILE MACHINESЛагереv А.В., Лагереv И.А.
Lagerev A.V., Lagerev I.A.Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского (Брянск, Россия)
Academician I.G. Petrovskii Bryansk State University (Bryansk, Russian Federation)

Аннотация. Статья посвящена проблеме повышения эффективности применения частотного регулирования гидропривода механизмов движения звеньев шарнирно-сочлененных манипуляционных систем мобильных транспортно-технологических машин. Ранее авторами было показано, что вид закона регулирования частоты вращения вала объемного насоса и его количественные характеристики оказывают определяющее воздействие на вид и количественные характеристики графиков изменения во времени кинематических и гидравлических параметров процесса перемещения звеньев манипуляционных систем. На примере поворотного движения звена натурной манипуляционной системы выполнен количественный анализ различных законов регулирования. Показано, что наиболее благоприятной формой закона изменения частоты вращения вала регулируемого объемного насоса является S-образная форма. Сформулированы критерии качества регулирования, которые позволяют обеспечить благоприятные параметры движения (отсутствие динамической неустойчивости движения) с учетом величины действующих эксплуатационных нагрузок и конструктивных размеров звеньев. Предложена математическая модель, позволяющая синтезировать законы частотного регулирования, которые являются оптимальными для отдельного критерия качества – минимального времени отработки движения (однокритериальная оптимизация). Дано описание компьютерной программы, которая реализует предложенные математические модели.

Ключевые слова: манипуляционная система, мобильная машина, гидропривод, моделирование, частотное регулирование, закон регулирования.

Дата принятия к публикации: 21.06.2019
Дата публикации: 25.09.2019

Сведения об авторах:

Лагереv Александр Валерьевич – доктор технических наук, профессор, заместитель директора по научной работе НИИ фундаментальных и прикладных исследований ФГБОУ ВПО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского», e-mail: bsu-avl@yandex.ru.

ORCID: 0000-0003-0380-5456

Abstract. The article is devoted to the problem of increasing the efficiency of the use of frequency adjustment of the hydraulic drive of the mechanisms for the movement of links of articulated manipulation systems of mobile transport-technological machines. Earlier, the authors showed that the type of law regulating the rotational speed of a volumetric pump shaft and its quantitative characteristics have a decisive influence on the type and quantitative characteristics of graphs of the time variation of the kinematic and hydraulic parameters of the links movement. A quantitative analysis of various laws of regulation is made on the example of the rotary movement of the link of a full-scale manipulation system. It is shown that the most favorable form of the law for changing the shaft rotation speed of the variable displacement pump is S-shaped. Criteria of quality of regulation are formulated, which make it possible to ensure favorable parameters of movement (absence of dynamic movement instability) taking into account the magnitude of the operating operational loads and structural dimensions of the links. Mathematical model is proposed, allowing to synthesize the laws of frequency adjustment, which are optimal for individual quality criteria – the minimum time to work out the movement (single-criterion optimization). A description of a computer program that implements the proposed mathematical models is given.

Keywords: handling system, mobile machine, hydraulic drive, modeling, frequency adjustment, law of adjustment.

Date of acceptance for publication: 21.06.2019
Date of publication: 25.09.2019

Authors' information:

Alexander V. Lagerev - Doctor of Technical Sciences, Professor, Vice director of Research Institute of Fundamental and Applied Research, Academician I.G. Petrovskii Bryansk State University, e-mail: bsu-avl@yandex.ru.

ORCID: 0000-0003-0380-5456

Лагереv Игорь Александрович – доктор технических наук, доцент, проректор по инновационной работе ФГБОУ ВПО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского», e-mail: lagerev-bgu@yandex.ru.
ORCID: 0000-0002-0921-6831

Igor A. Lagerev - Doctor of Technical Sciences, Assistant Professor, Vice rector for Innovations, Academician I.G. Petrovskii Bryansk State University, e-mail: lagerev-bgu@yandex.ru.
ORCID: 0000-0002-0921-6831

Благодарности

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект №17-79-10274)

Acknowledgements

The study was supported by the grant of Russian science Foundation (project No. 17-79-10274)

1. Введение

В настоящее время манипуляционные системы шарнирно-сочлененной конструкции, установленные на мобильных транспортно-технологических машинах и комплексах различного функционального назначения, вследствие своей универсальности, простоты изготовления и неприхотливости в эксплуатации получили широкое распространение для выполнения широкой номенклатуры основных и вспомогательных технологических операций, включая подъемно-транспортные, перегрузочно-разгрузочные и складские работы, во многих отраслях экономики [1-4].

Наибольшее распространение получили манипуляционные системы, укомплектованные гидравлическим приводом механизмов движения отдельных исполнительных звеньев [2, 5, 6]. Гидравлический привод применительно к манипуляционным системам мобильных транспортно-технологических машин весьма широко используется производителями подъемно-транспортной техники как в Российской Федерации [7], так и за рубежом – в Германии, Корее, Китае, Японии, Италии, Швеции, Австрии, США и др. [7-9].

Широкое использование насосных гидроприводов в конструкциях манипуляционных систем мобильных транспортно-технологических машин различного функционального назначения определяется совокупностью их технико-экономических преимуществ перед другими известными типами приводов [10-12]. В частности, в число указанных преимуществ входят такие, как

- широкий диапазон бесступенчатого регулирования скорости выходных звеньев

гидродвигателей в сочетании с хорошей плавностью их движения;

- возможность работы гидропривода в динамических режимах при частых включениях, остановках и реверсах движения;

- возможность реализации автоматического управления кинематическими параметрами движения выходных звеньев силовых гидродвигателей и, как следствие, кинематическими параметрами подвижных звеньев шарнирно-сочлененных манипуляционных систем.

Эти преимущества важны с точки зрения возможности обеспечения эффективного регулирования гидроприводов и поэтому широко реализуются в ныне применяющихся типах регулирования – дроссельном, машинном (объемном), частотном, комбинированном машинно-дроссельном [10, 11, 13-15]. По времени практического применения наиболее поздним является частотное регулирование. Его использование для целей регулирования объемных гидроприводов машиностроительного назначения, включая подъемно-транспортную технику, в настоящее время становится перспективным в связи с развитием элементной базы регулирования частоты вращения роторов приводных электродвигателей [16], что позволяет в конструкции гидросистем мобильных машин использовать менее дорогие и более надежные нерегулируемые объемные гидронасосы и гидромоторы. Таким образом, частотно-регулируемые гидроприводы, управляемые автоматизированными системами на базе частотных преобразователей с обратной связью, оказываются весьма перспективными для оснащения гидрофицированных мобильных транспортно-

технологических машин с грузоподъемными манипуляционными системами.

2. Постановка задачи исследования

Создание энергоэффективных и надежных манипуляционных систем с частотно-регулируемым гидроприводом механизмов движения шарнирно-сочлененных звеньев требует проведения широкого комплекса теоретических и экспериментальных работ, связанных с изучением и моделированием протекающих в гидроприводе гидродинамических процессов и их связи с кинематикой и динамикой движущихся звеньев манипуляционной системы и транспортируемых грузов.

Моделирование рабочих процессов частотно-регулируемого гидропривода, результаты которого представлены в [13, 17], показало, что вид закона регулирования частоты вращения вала объемного насоса $n(x)$ в зависимости от параметра регулирования x и его количественные характеристики оказывают определяющее воздействие на вид и количественные характеристики графиков изменения во времени кинематических и гидравлических параметров процесса перемещения звеньев манипуляционных систем мобильных транспортно-технологических машин.

Поэтому практически значимой инженерной проблемой является решение задачи синтеза или, как минимум, рационального задания такого закона частотного регулирования, т.е. функции $n(x)$, который обеспечивал бы благоприятные (по какому-либо критерию или критериям) условия выполнения движения звена манипуляционной системы и перемещения транспортируемого груза. В качестве параметра регулирования могут выступать, например, время или угол поворота/линейное смещение подвижного звена.

В качестве возможных критериев качества регулирования, реализация которых может быть положена в основу синтеза оптимальных законов $n(x)$, целесообразно использовать, в частности, такие требования, как:

1) исключение или уменьшение до допустимой величины суммарной продолжительности интервала времени, в течение которого при выполнении движения звена будет

наблюдаться колебательная нестабильность кинематических и гидравлических параметров процесса, зафиксированная в [13, 17];

2) снижение до допустимой величины (в том числе, до 0) размаха быстропротекающих колебаний кинематических и гидравлических параметров при выполнении движения звена;

3) исключение или уменьшение до допустимой величины суммарной продолжительности интервала времени, в течение которого при выполнении движения звена будут наблюдаться отрицательные угловые ускорения, т.е. будет наблюдаться торможение звена;

4) снижение до допустимой величины (в том числе, до 0) максимального значения отрицательного углового ускорения при выполнении движения звена.

Также возможно использование комплексных критериев, основанных на композиции нескольких индивидуальных критериев с учетом степени приоритетности каждого из них для обеспечения требуемых параметров движения звеньев манипуляционных систем.

3. Анализ влияния закона регулирования на кинематические и гидравлические параметры перемещения звеньев манипуляционных систем

Анализ простейших исследованных законов частотного регулирования насоса, когда частота вращения вала насоса либо монотонно возрастает, либо монотонно уменьшается, а также квадратичных законов [13, 17] показывает, что кинематическая и гидравлическая нестабильность и отрицательные угловые ускорения характерны для тех периодов времени, когда частота вращения снижается, т.е. когда

$$\frac{d}{dx}n(x) < 0.$$

Для уяснения вопроса о том, как чередование нескольких интервалов времени возрастания и снижения частоты вращения вала насоса влияет на нестабильность кинематических и гидравлических параметров, были рассмотрены более сложные законы частотного регулирования, показанные на рис. 1.

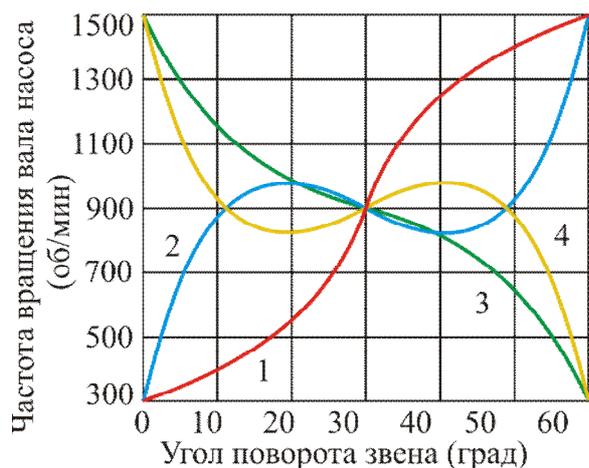


Рис. 1. Графики законов частотного регулирования изменения во времени величины подачи насоса

С целью преемственности исследований частотно-регулируемого гидропривода мобильных машин, результаты которых приведены в [13, 17], в данной работе использовался тот же самый объект – механизм поворота

стрелы трехзвенной шарнирно-сочлененной манипуляционной системы (рис. 2). И также рассматривалось поворотное движение (подъем) стрелы манипуляционной системы при неподвижном состоянии рукояти из начального (нижнего) положения в конечное (верхнее) положение в пределах угла поворота 60° . Начальная и конечная конфигурации кинематической схемы манипуляционной системы с соблюдением геометрических пропорций звеньев соответствуют показанным в [18]. Вес транспортируемого груза составлял номинальное значение $G = 7,5$ кН. Графики изменения в зависимости от угла поворота стрелы величин приведенных к штоку гидроцилиндра эксплуатационной продольной силы F_{ol} и массы перемещаемого груза и движущихся элементов металлоконструкции манипуляционной системы M_{red} соответствуют приведенным в [18].

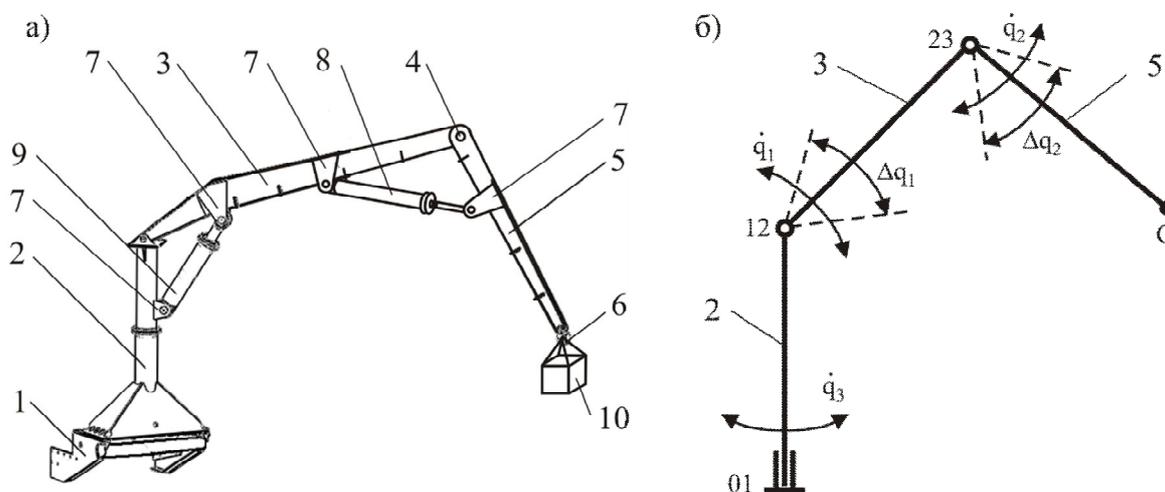


Рис. 2. Трехзвенный гидравлический кран-манипулятор мобильной машины [18]:

а - конструктивное исполнение; б – кинематическая схема

(1 - опорная конструкция; 2 - поворотная колонна; 3 - стрела; 4 - шарнирный узел соединения смежных звеньев; 5 - рукоять; 6 - грузозахватный орган; 7 - элементы крепления; 8 - силовой гидродвигатель механизма поворотного движения рукояти; 9 - силовой гидродвигатель механизма поворотного движения стрелы; 10 – груз);

Размеры металлоконструкции, условия и режимы эксплуатации, а также параметры гидросистемы взяты аналогичными соответствующим характеристикам мобильной машины АСТ-4-А для сварки магистральных трубопроводов [19, 20]. Состав и технические характеристики насоса, гидроаппаратов, гид-

роустройств и гидролиний, использованные при проведении тестовых расчетов, аналогичны принятым в работе [18].

На рис. 3 приведены графики изменения с течением времени кинематических параметров движения стрелы в процессе ее подъема: угла поворота q_2 , угловой скорости \dot{q}_2 и уг-

лового ускорения \ddot{q}_2 . Номера графиков соответствуют номерам исследованных зако-

нов частотного регулирования, представленных на рис. 1.

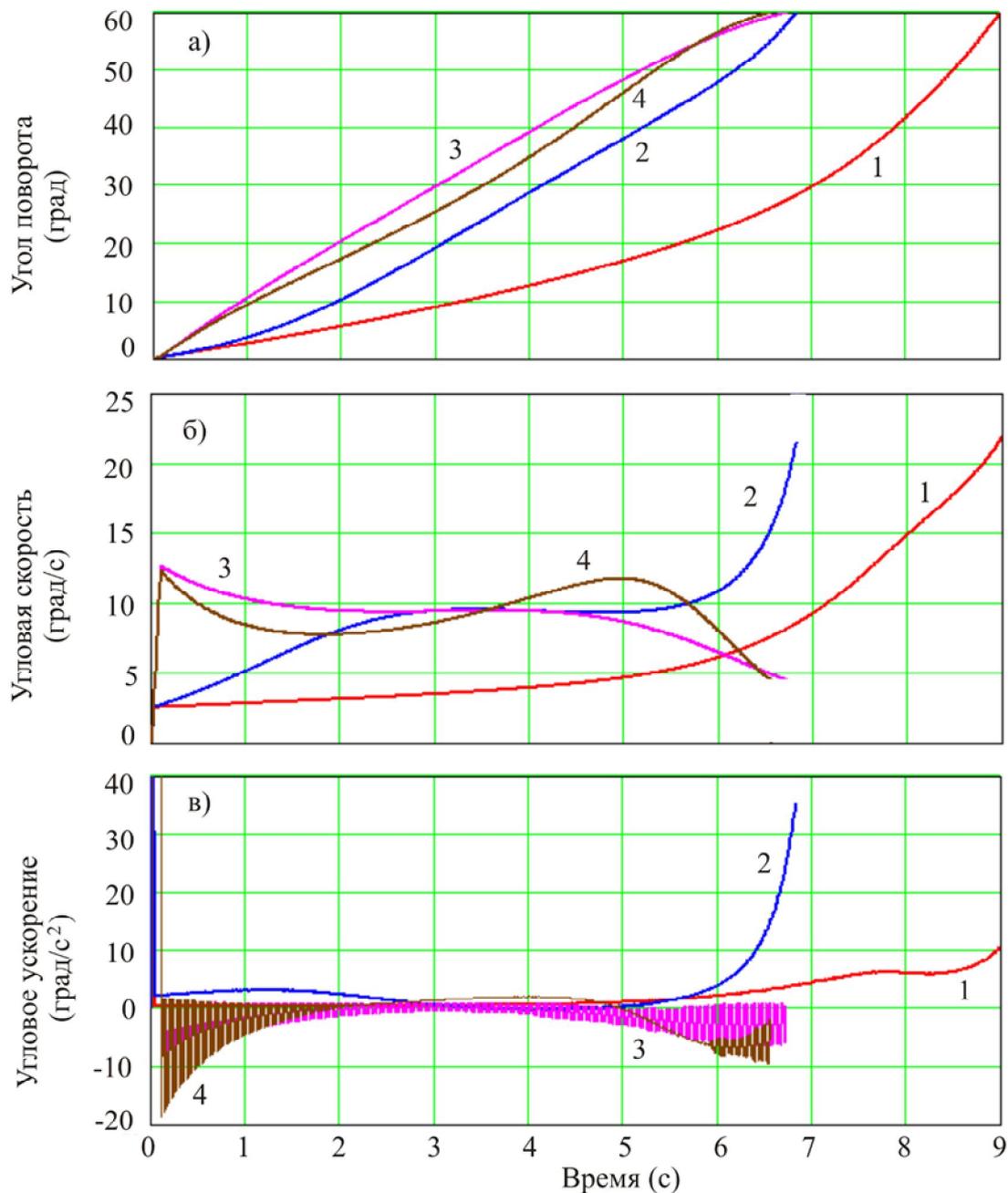


Рис. 3. Графики изменения во времени кинематических параметров поворотного движения звена: а - угла поворота стрелы; б - угловой скорости стрелы; в – углового ускорения стрелы

На рис. 4 и 5 приведены графики изменения с течением времени гидродинамических параметров (давления и объемного расхода рабочей жидкости) в характерных точках гидросистемы механизма поворота стрелы манипуляционной системы, а также перепада давления на гидродвигателе и расхода жидкости через предохранительный клапан.

Для более сложных законов изменения частоты вращения вала регулируемого насоса выявленные ранее в [13, 17] закономерности появления кинематической и гидродинамической неустойчивости в целом сохраняются. Однако, как видно из анализа закона 2, переход частоты в стадию снижения после стадии достаточно длительного начального увеличе-

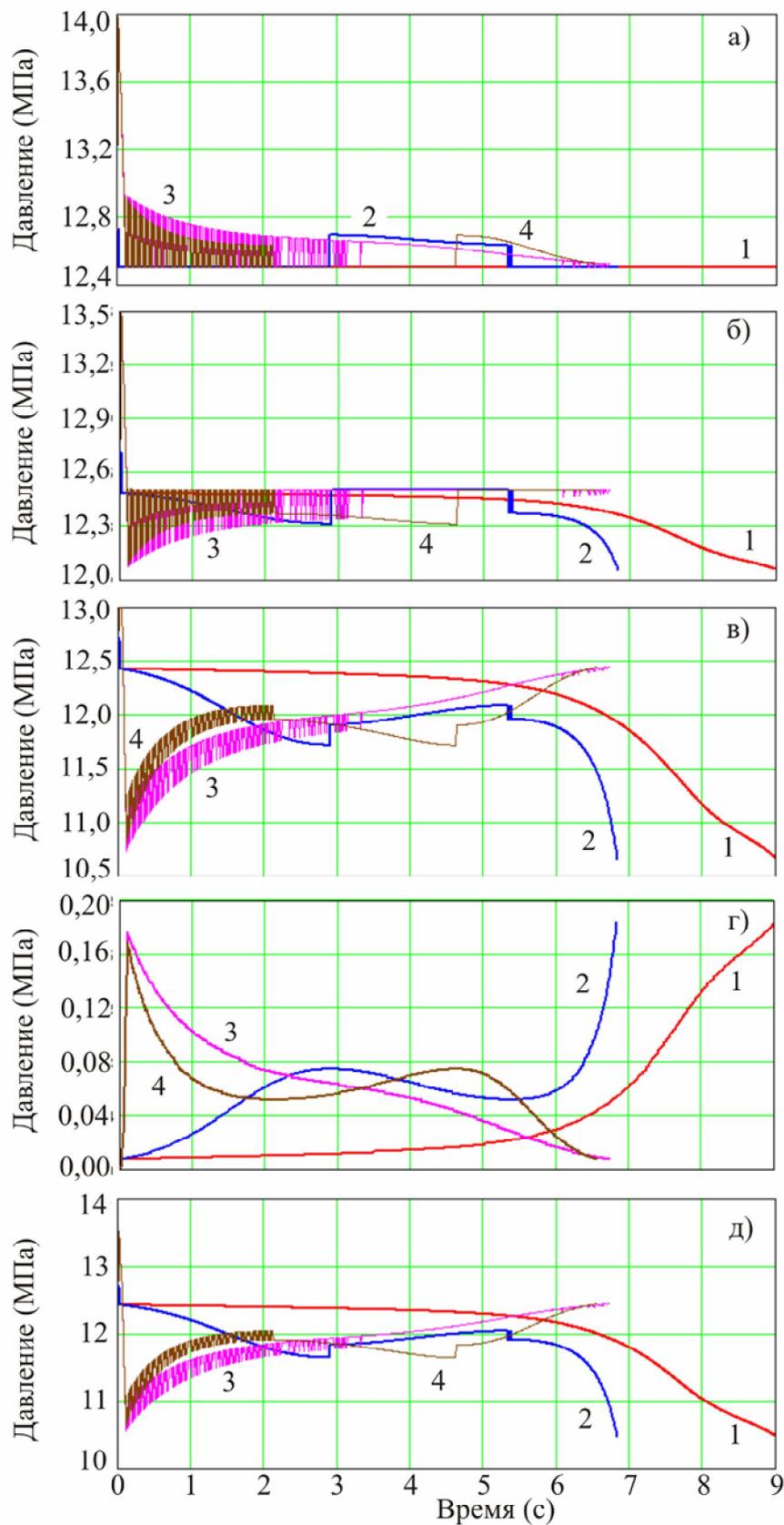


Рис. 4. Графики изменения во времени давления в характерных точках гидросистемы:
 а – выход насоса; б – предохранительный клапан; в – вход гидроцилиндра;
 г – выход гидроцилиндра; д – перепад давления на гидроцилиндре

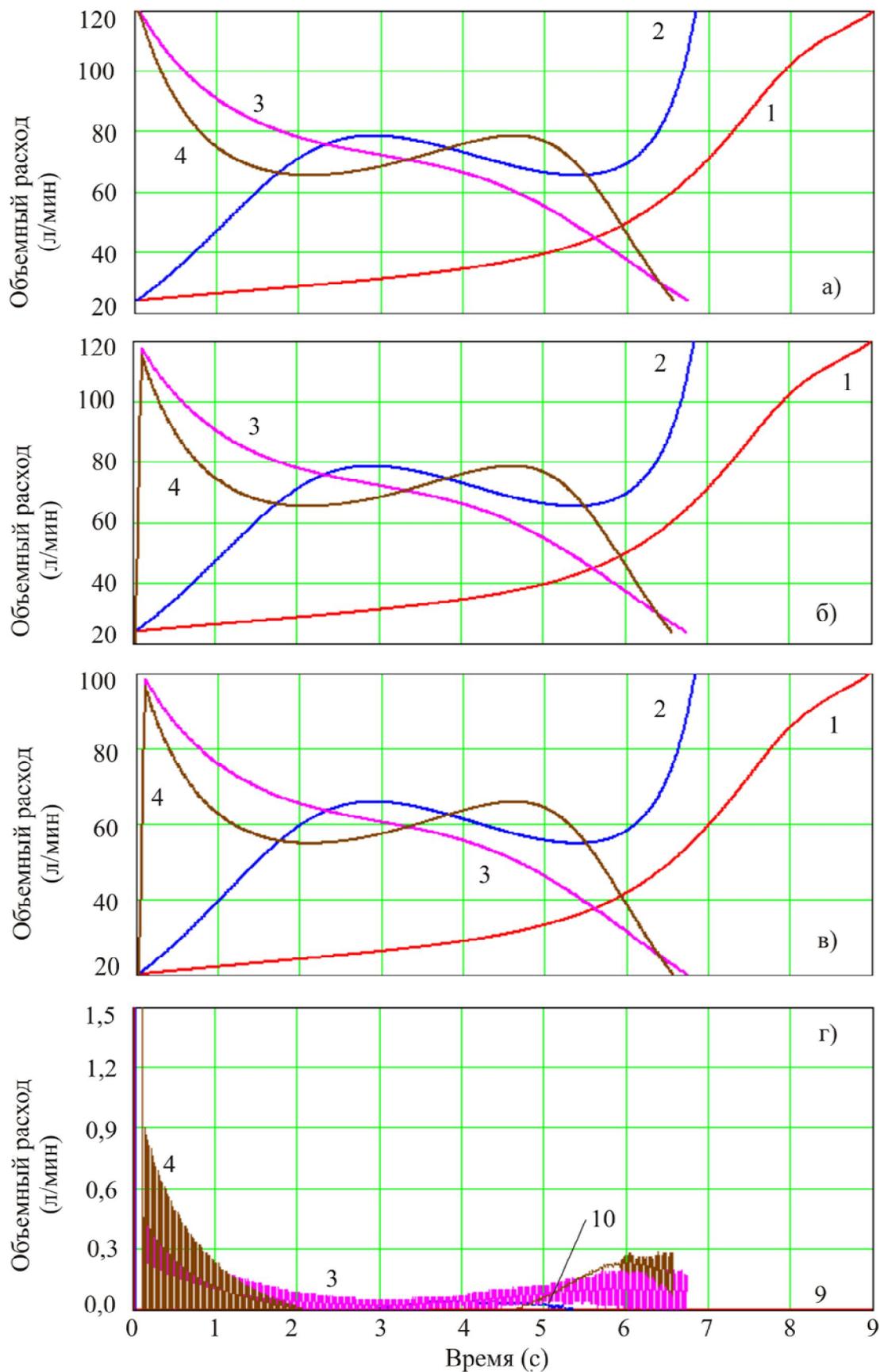


Рис. 5. Графики изменения во времени объемного расхода в характерных точках гидросистемы:
 а – выход насоса; б – вход гидроцилиндра; в – выход гидроцилиндра;
 г – расход через предохранительный клапан

ния практически не привел к появлению неустойчивости параметров движения звена манипуляционной системы. С другой стороны, как видно из анализа законов 3 и 4, после достаточно длительной начальной стадии снижения частоты вращения вала насоса на стадии увеличения частоты наблюдается явление неустойчивости, хотя его проявление предельно мало и вряд ли способно оказать заметное негативное воздействие на работу механизма движения звена манипуляционной системы.

Суммируя изложенное, можно сделать следующий вывод: по критерию исключения или максимального снижения неустойчивости кинематических и гидродинамических параметров движения звена манипуляционной системы наилучшей формой закона изменения в зависимости от управляющего параметра (времени, угла поворота, смещения и др.) частоты вращения вала регулируемого объемного насоса является такая форма, при которой в течение всего периода движения

$$\frac{d}{dx}n(x) \geq 0.$$

Аналогичный вывод можно сделать и для критерия исключения или максимального уменьшения суммарной продолжительности интервала времени, в течение которого при выполнении движения звена будут наблюдаться отрицательные угловые ускорения, т.е. будет наблюдаться торможение звена.

Для уточнения вида и особенностей благоприятного закона регулирования частоты вращения вала регулируемого объемного насоса были дополнительно рассмотрены несколько законов $n(x)$, представленных на рис. 6. Они позволяют оценить влияние длительности увеличения частоты на начальной и конечной стадиях на кинематические и гидродинамические параметры движения звена манипуляционной системы.

На рис. 7 приведены графики изменения с течением времени кинематических параметров движения стрелы в процессе ее подъема: угла поворота q_2 , угловой скорости \dot{q}_2 и углового ускорения \ddot{q}_2 . Номера графиков соответствуют номерам исследованных законов частотного регулирования, представленных на рис. 1 и 6.

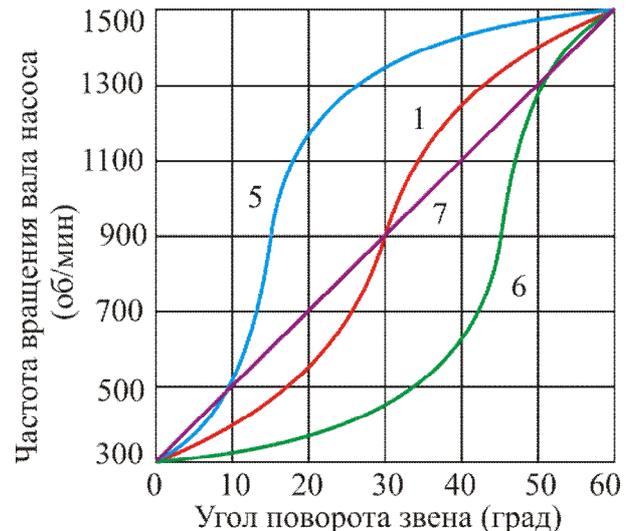


Рис. 6. Графики законов частотного регулирования изменения во времени величины подачи насоса

Продолжительность отработки движения звеном манипуляционной системы в случае использования графиков частотного регулирования объемного насоса 1, 5 и 7 примерно одинакова, составляя 8...9 с. Однако при более медленном нарастании частоты вращения вала насоса на начальной стадии отработки движения (стадии разгона звена из начального неподвижного состояния) наблюдается существенное, практически в 1,5 раза увеличение времени движения, что является негативным фактором с точки зрения обеспечения производительности крана-манипулятора при выполнении погрузочно-разгрузочных операций. Для всех исследованных законов частотного регулирования максимальная угловая скорость поворота стрелы достигается на конечной стадии отработки движения при приближении к конечной точке траектории и составляет ~22 град/с. Наибольшую стабильность кинематических параметров движения обеспечивает закон 7, соответствующий линейному изменению частоты вращения вала насоса от его минимального до максимального паспортного значения. В течение всего движения стрелы манипуляционной системы угловые скорость и ускорение изменяются плавно, причем отсутствуют интервалы времени с замедлением движения из-за отрицательных значений ускорения. Для закона 6 также характерна стабильность кинематических параметров в течение большей части

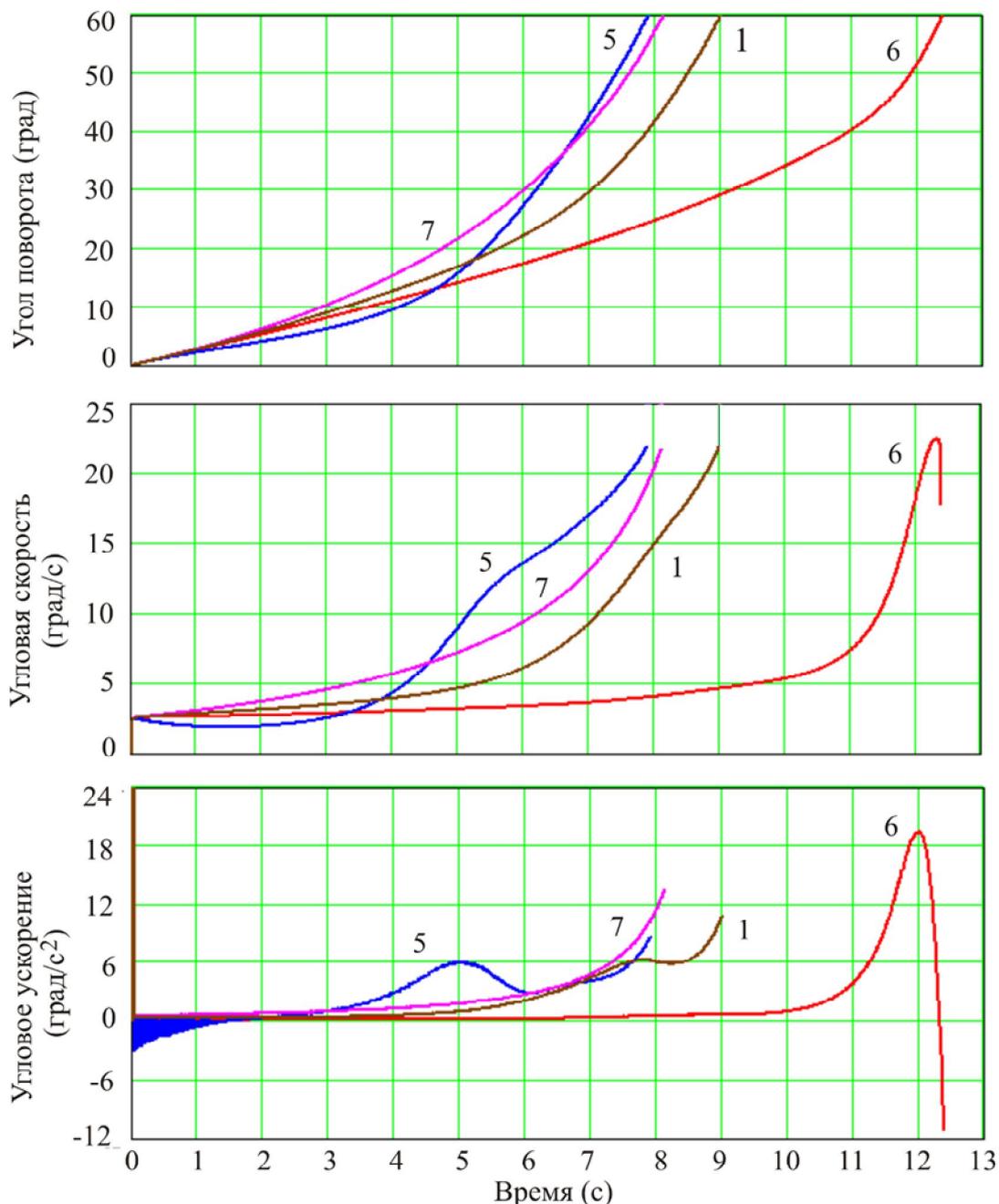


Рис. 7. Графики изменения во времени: а - угла поворота стрелы; б - угловой скорости стрелы; в – углового ускорения стрелы

времени поворота стрелы. Фиксируемая нестабильность угловых скорости и ускорения весьма малой длительности $\sim 0,3$ с наблюдается лишь на конечной стадии отработки движения вблизи конечной точки траектории и, таким образом, не может оказать существенного воздействия на повышение уровня динамического напряженно-деформированного состояния металлоконструкции стрелы и манипуляционной системы в целом. Наибольшая нестабильность кинематических пара-

метров свойственна закону частотного регулирования 5. Это говорит о том, что достаточно быстрое повышение частоты вращения вала регулируемого насоса и, соответственно, объемной подачи рабочей жидкости в гидросистему на начальной стадии отработки движения может оказывать негативное влияние на стабильность кинематических параметров движения звеньев манипуляционных систем.

На рис. 8 и 9 приведены графики изменения с течением времени гидродинамических

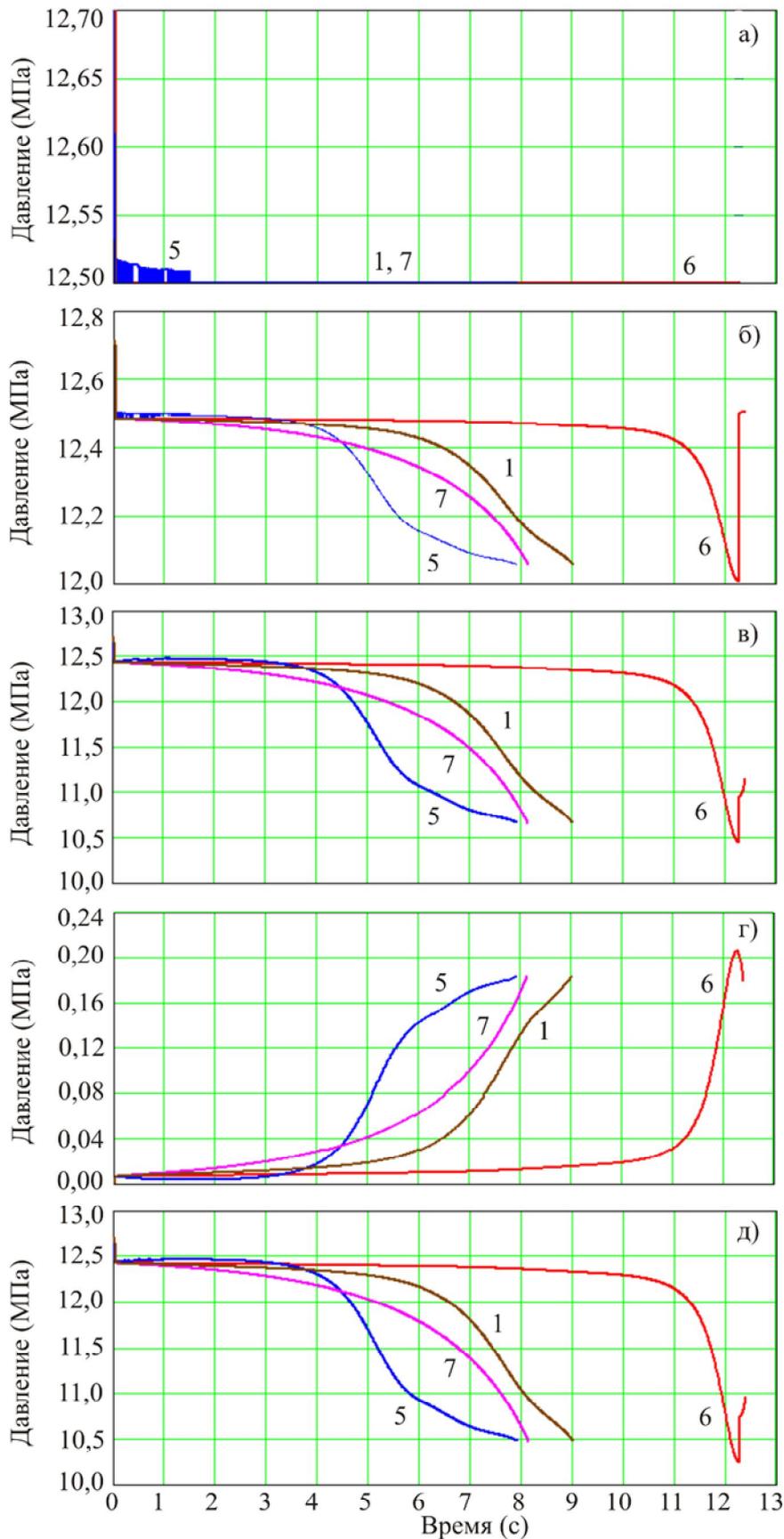


Рис. 8. Графики изменения во времени величины давления в характерных точках гидросистемы: а – выход насоса; б – предохранительный клапан; в – вход гидроцилиндра; г – выход гидроцилиндра; д – перепад давления на гидроцилиндре

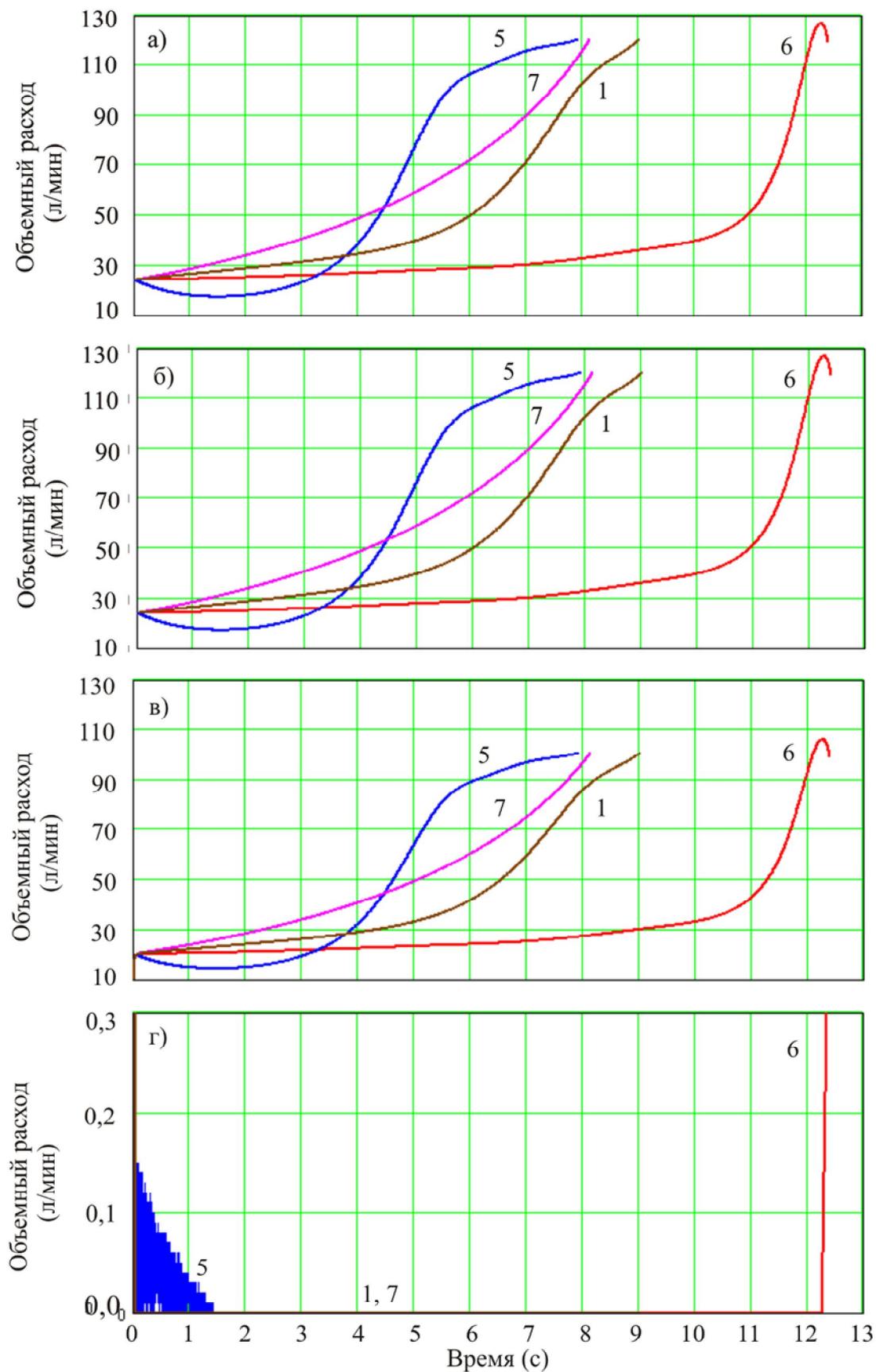


Рис. 9. Графики изменения во времени объемного расхода в характерных точках гидросистемы:
а – выход насоса; б – вход гидроцилиндра; в – выход гидроцилиндра;
г – расход через предохранительный клапан

параметров (давления и объемного расхода рабочей жидкости) в характерных точках гидросистемы механизма поворота стрелы манипуляционной системы, а также перепада давления на гидродвигателе и расхода жидкости через предохранительный клапан.

Таким образом, анализ результатов моделирования рабочих процессов в частотно-регулируемом гидроприводе манипуляционных систем мобильных транспортно-технологических машин, представленных на рис. 7 – 9, позволяет сделать вывод о том, что наиболее благоприятной формой закона изменения частоты вращения вала регулируемого объемного насоса является S-образная форма (и как частный случай данной формы – линейная форма типа 7).

Очевидно, конкретные количественные характеристики S-образной формы закона $n(x)$ на начальной, средней и конечной стадиях отработки движения звеном манипуляционной системы, обеспечивающие реализацию сформулированных выше критериев обеспечения благоприятных условий выполнения движения, зависят от конструктивных особенностей и размеров движущихся звеньев, уровня и закона изменения по мере движения величины эксплуатационных нагрузок, мощности гидродвигателей, технических характеристик объемных насосов и др.

4. Постановка задачи синтеза оптимальных законов частотного регулирования гидропривода механизма движения звена манипуляционной системы

Закон частотного регулирования $n(x)$ произвольной геометрической формы может быть представлен конечным дискретным набором опорных точек $n_j(x_j)$ общим числом J , соединенных между собой одномерным кубическим сплайном (рис. 10). Таким образом, вектор $\{z\}$ варьируемых переменных задачи поиска оптимального закона частотного регулирования формируется из указанных опорных точек и имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \{z\}^T &= \{z_1 \ z_2 \ \dots \ z_j \ \dots \ z_{j-1} \ z_J\} = \\ &= \{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_j \ \dots \ n_{j-1} \ n_J\}. \end{aligned}$$

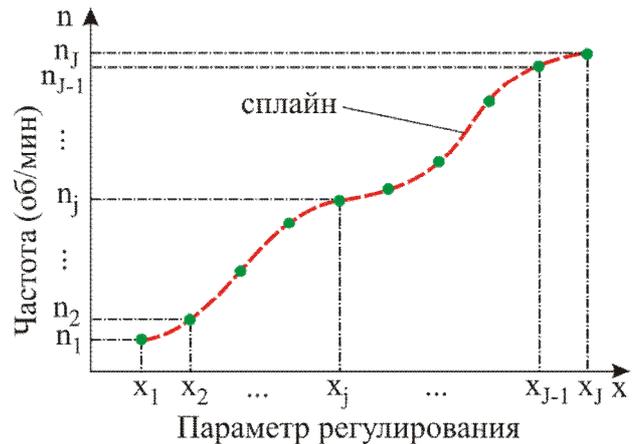


Рис. 10. Дискретное геометрическое представление закона частотного регулирования насоса, используемое при оптимальном синтезе

Целевая функция задачи синтеза оптимальных законов частотного регулирования может количественно выражать либо один из сформулированных выше критериев качества регулирования, что будет приводить к однокритериальной задаче оптимизации, либо выражать совместно несколько критериев качества регулирования, что будет приводить к многокритериальной задаче оптимизации. В первом случае те критерии качества регулирования, которые не были использованы при формировании целевой функции, должны быть учтены в системе ограничений задачи оптимизации. В последнем случае многокритериальную целевую функцию целесообразно строить в виде аддитивной функции, причем неучтенные при построении такой целевой функции критерии качества регулирования также должны быть отражены в системе ограничений задачи многокритериальной оптимизации. Структура аддитивной функции предложена в [21]:

$$F(\{z\}) = \left\langle \sum_k w_k \left\{ 1 - \left[\frac{F_k(\{z\}^{opt})}{F_k(\{z\})} \right]^{s_{extr,k}} \right\}^2 \right\rangle^{0,5} \rightarrow \min, \quad (1)$$

где w_k – весовой коэффициент, характеризующий степень важности k -го показателя качества регулирования с точки зрения проектировщика ($\sum w_k = 1$); $F_k(\{z\}^{opt})$ – значение целевой функции при однокритериаль-

ной оптимизации согласно k -го критерия качества регулирования в точке оптимума; $\{z\}_k^{opt}$ - вектор варьируемых переменных задачи поиска оптимального закона регулирования при однокритериальной оптимизации согласно k -го критерия качества регулирования в точке оптимума; $s_{extr,k}$ - индикатор экстремальности k -го показателя качества регулирования (при поиске минимума $s_{extr,k}=1$, при поиске максимума $s_{extr,k}=-1$).

Вычислительная эффективность применения свертки нескольких критериев качества частотного регулирования в виде целевой функции вида (1) обусловлена тем, что необходимо выполнение нескольких однотипных расчетов при неизменном вычислительном алгоритме [21]. Это имеет существенное значение для разработки универсального программного обеспечения, предназначенного для автоматизации процесса синтеза оптимальных законов регулирования гидроприводов манипуляционных систем мобильных транспортно-технологических машин.

В данной работе рассмотрен случай однокритериальной оптимизации. При построении целевой функции был использован критерий обеспечения минимальной длительности отработки движения звена τ_{mov} , что важно с точки зрения обеспечения максимально возможной производительности работы манипуляционной системы:

$$F(\{z\}) = \tau_{mov} \rightarrow \min. \quad (2)$$

При поиске минимума целевой функции вида (2) необходимо учесть ряд ограничений в виде неравенств, выражающих как критерии качества регулирования, так и дополнительные условия:

- условия нахождения закона регулирования в пределах паспортного интервала изменения частоты вращения вала объемного насоса

$$z_j - n_{\min} \geq 0, \quad 1 \leq j \leq J; \quad (3)$$

$$n_{\max} - z_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq J; \quad (4)$$

- критерий уменьшения до допустимой величины (или исключения) интервала времени, в течение которого при выполнении

движения звена будут наблюдаться отрицательные угловые ускорения

$$\psi_q \tau_{mov} - l_q \Delta h \geq 0; \quad (5)$$

- критерий снижения до допустимой величины максимального значения отрицательного углового ускорения при выполнении движения звена

$$\ddot{q}_{\min} - [\ddot{q}_{\min}] \geq 0; \quad (6)$$

- критерий уменьшения до допустимой величины (или исключения) интервала времени, в течение которого при выполнении движения звена будет наблюдаться колебательная неустойчивость кинематических и гидравлических параметров процесса

$$\psi_v \tau_{mov} - l_v \Delta h \geq 0; \quad (7)$$

$$\psi_a \tau_{mov} - l_a \Delta h \geq 0; \quad (8)$$

$$\psi_p \tau_{mov} - l_p \Delta h \geq 0; \quad (9)$$

$$\psi_{\Delta p} \tau_{mov} - l_{\Delta p} \Delta h \geq 0; \quad (10)$$

- критерий снижения до допустимой величины размаха быстропротекающих колебаний кинематических и гидравлических параметров при выполнении движения звена (для $2 \leq k \leq K-1$)

$$(\dot{q}_{k-1} - \dot{q}_k)(\dot{q}_k - \dot{q}_{k+1}) + \lambda_v [\dot{q}_{\max}]^2 \geq 0; \quad (11)$$

$$(\ddot{q}_{k-1} - \ddot{q}_k)(\ddot{q}_k - \ddot{q}_{k+1}) + \lambda_a [\ddot{q}_{\max}]^2 \geq 0; \quad (12)$$

$$(p_{p,k-1} - p_{p,k})(p_{p,k} - p_{p,k+1}) + \lambda_p p_{nom}^2 \geq 0; \quad (13)$$

$$[(p_{in,k-1} - p_{out,k-1}) - (p_{in,k} - p_{out,k})] \times \\ \times [(p_{in,k} - p_{out,k}) - (p_{in,k+1} - p_{out,k+1})] + \lambda_p p_{nom}^2 \geq 0; \quad (14)$$

- условие ограничения максимальной угловой скорости движения звена

$$[\dot{q}_{\max}] - \dot{q}_{\max} \geq 0; \quad (15)$$

- условие ограничения максимального углового ускорения движения звена

$$[\ddot{q}_{\max}] - \ddot{q}_{\max} \geq 0; \quad (16)$$

где n_{\min} , n_{\max} - паспортные минимальная и максимальная частота вращения вала насоса; \ddot{q}_{\min} , \ddot{q}_{\max} - минимальное и максимальное значения углового ускорения в течение всего времени движения звена; \dot{q}_{\max} - максимальное значение угловой скорости в течение всего времени движения звена; ψ_q - доля времени отработки движения τ_{mov} , в течение которой суммарно наблюдаются отрицательные угло-

вые ускорения движения звена; $\psi_v, \psi_a, \psi_p, \psi_{\Delta p}$ - доли времени отработки движения τ_{mov} , в течение которых суммарно наблюдается колебательная неустойчивость угловой скорости, углового ускорения, давления на выходе насоса и перепада давления на гидродвигателе соответственно; $[\dot{q}_{max}], [\ddot{q}_{max}]$ - предельно допустимые максимальные значения угловой скорости и углового ускорения движения звена; $[\dot{q}_{min}]$ - предельно допустимое минимальное (отрицательное) значение углового ускорения движения звена; $l_v, l_a, l_p, l_{\Delta p}$ - число моментов времени интегрирования уравнения движения звена, в которые наблюдается колебательная неустойчивость угловой скорости, углового ускорения, давления на выходе насоса и перепада давления на гидродвигателе соответственно; Δh - временной шаг интегрирования уравнения движения звена; P_{nom}, P_p - номинальное и мгновенное давление на выходе насоса; P_{in}, P_{out} - давление на входе и на выходе гидродвигателя; K - число точек интегрирования уравнения движения звена в пределах угла поворота или хода Δq ; $\lambda_v, \lambda_a, \lambda_p$ - безразмерные коэффициенты ($\lambda \ll 1$), лимитирующие степень неустойчивости соответствующего кинематического или гидродинамического параметра (рекомендуется принимать $0 \leq \lambda \leq 10^{-5}$).

При расчете значений $l_v, l_a, l_p, l_{\Delta p}$, входящих в левую часть ограничений (7) – (10), считается, что в k -й момент времени интегрирования уравнения движения звена наблюдается колебательная неустойчивость угловой скорости, углового ускорения, давления на выходе насоса и перепада давления на гидродвигателе, если для этого момента времени соответственно выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} &(\dot{q}_{k-1} - \dot{q}_k)(\dot{q}_k - \dot{q}_{k+1}) < 0; \\ &(\ddot{q}_{k-1} - \ddot{q}_k)(\ddot{q}_k - \ddot{q}_{k+1}) < 0; \\ &(P_{p,k-1} - P_{p,k})(P_{p,k} - P_{p,k+1}) < 0; \\ &[(P_{in,k-1} - P_{out,k-1}) - (P_{in,k} - P_{out,k})] \times \\ &\times [(P_{in,k} - P_{out,k}) - (P_{in,k+1} - P_{out,k+1})] < 0. \end{aligned}$$

С уменьшением величины коэффициента λ допускаемая законом частотного регулирования степень неустойчивости соответствующего кинематического или гидродинамического параметра уменьшается и при задании $\lambda = 0$ неустойчивость полностью исключается. Так как кинематические и гидродинамические параметры взаимоувязаны, то ужесточение требования к степени неустойчивости по одному из них влияет на снижение степени неустойчивости других параметров, хотя и в разном количественном выражении.

Таким образом, целевая функция вида (2) и система ограничений-неравенств (3) – (16) формируют математическую модель и задачу синтеза оптимальных законов частотного регулирования объемных насосов гидроприводов механизмов движения звеньев манипуляционных систем мобильных транспортно-технологических машин. Для решения оптимизационной задачи (2) – (16) следует использовать методы условной нелинейной оптимизации, изложенные, например, в [22].

5. Компьютерная реализация математической модели

Разработанная математическая модель реализована в компьютерной программе «Синтез оптимальных законов частотного регулирования гидроприводов мобильных машин».

Программа позволяет формировать оптимальные законы частотного регулирования для возвратно-поворотного движения прямолинейных звеньев и звеньев с рычагом. Конструктивное исполнение указанных звеньев приведено в [7, 19]. Для этого предусмотрены 4 варианта расчета, каждый из которых соответствует одному из 4 возможных вариантов движения звеньев:

- 1 вариант движения – подъем прямолинейного звена;
- 2 вариант движения – опускание прямолинейного звена;
- 3 вариант движения – подъем звена с рычагом;
- 4 вариант движения – опускание звена с рычагом.

Структурная схема программы включает в себя головную процедуру *Synthesis_of_Optimal_Laws_for_Frequency_Regulation*, 26 процедур типа Procedure:

- *ApproxLaw* – аппроксимация оптимального закона частотного регулирования на основе опорных точек вектора $\{z\}^{opt}$;
- *BeginPoint13* – формирование начальной точки оптимизации (варианты движения 1 и 3);
- *BeginPoint24* – формирование начальной точки оптимизации (варианты движения 2 и 4);
- *CelFun* – вычисление целевой функции вида (2);
- *DrivForce13* – определение величины движущей силы на штоке гидроцилиндра (варианты движения 1 и 3);
- *DrivForce24* – определение величины движущей силы на штоке гидроцилиндра (варианты движения 2 и 4);
- *DetAngle* – определение угла поворота прямолинейного звена при известном значении смещения поршня гидроцилиндра;
- *DetAngleF* – определение угла поворота звена с рычагом при известном значении смещения поршня гидроцилиндра;
- *DetPQbegin13* – определение давлений и расходов в расчетных точках гидросистемы в начальный момент времени поворота звена (варианты движения 1 и 3);
- *DetPQbegin24* – определение давлений и расходов в расчетных точках гидросистемы в начальный момент времени поворота звена (варианты движения 2 и 4);
- *DetPressure13* – определение давлений и расходов в расчетных точках гидросистемы в произвольный момент времени поворота звена (варианты движения 1 и 3);
- *DetPressure24* – определение давлений и расходов в расчетных точках гидросистемы в произвольный момент времени поворота звена (варианты движения 2 и 4);
- *MotionVar1* – интегрирование уравнения движения звена при расчете ограничений (вариант движения 1);
- *MotionVar2* – интегрирование уравнения движения звена при расчете ограничений (вариант движения 2);

- *MotionVar3* – интегрирование уравнения движения звена при расчете ограничений (вариант движения 3);
 - *MotionVar4* – интегрирование уравнения движения звена при расчете ограничений (вариант движения 4);
 - *Ogran* – вычисление ограничений (3) – (16) задачи оптимизации;
 - *Optimizer* – поиск минимума целевой функции в соответствии с алгоритмом прямого метода оптимизации типа Хука-Дживса;
 - *PresLossUch* – определение величины потери давления на расчетном участке гидросистемы;
 - *SplInt* – кубическая сплайн-интерполяция одномерной функции, заданной набором опорных точек;
 - *UravnRK13* – определение значения правой части уравнения движения звена согласно метода Рунге-Кутты 4-го порядка (варианты движения 1 и 3);
 - *UravnRK24* – определение значения правой части уравнения движения звена согласно метода Рунге-Кутты 4-го порядка (варианты движения 2 и 4);
 - *Variant1* – интегрирование уравнения движения звена при моделировании рабочих процессов (вариант движения 1);
 - *Variant2* – интегрирование уравнения движения звена при моделировании рабочих процессов (вариант движения 2);
 - *Variant3* – интегрирование уравнения движения звена при моделировании рабочих процессов (вариант движения 3);
 - *Variant4* – интегрирование уравнения движения звена при моделировании рабочих процессов (вариант движения 4), а также 2 процедуры типа Function:
 - *AprSpl* – расчет значения функции, заданной кубическим сплайном, в заданной точке;
 - *PresValve* – расчет величины давления на предохранительном клапане при его работе.
- Результатом выполнения компьютерной программы является построение оптимального закона частотного регулирования и расчет количественных характеристик движения звена:

- 1) оптимального вектора ординат опорных точек закона регулирования $\{z\}^{opt}$;
- 2) продолжительности движения звена манипуляционной системы τ_{mov} в пределах угла поворота или хода Δq ;
- 3) максимального значения угловой скорости \dot{q}_{max} в течение всего времени движения звена;
- 4) минимального \ddot{q}_{min} и максимального \ddot{q}_{max} значений углового ускорения в течение всего времени движения звена;
- 5) объема рабочей жидкости V , использованного для отработки движения;
- 6) затрат энергии E , использованной для отработки движения.

6. Анализ тестовых результатов применения математической модели

Для получения тестовых результатов применения разработанной математической модели использовался тот же самый объект, что и ранее в п. 3, – механизм поворота стрелы трехзвенной шарнирно-сочлененной манипуляционной системы (рис. 2), выполняющий поворотное движение (подъем) стрелы манипуляционной системы при неподвижном состоянии рукояти из начального (нижнего) положения в конечное (верхнее) положение в пределах угла поворота 60° .

На рис. 11 приведены графики оптимального закона частотного регулирования в зависимости от числа заданных опорных точек J при нахождении вектора $\{z\}^{opt}$. Увеличение числа опорных точек приводит не только к усложнению геометрической формы закона $n(x)$, но и к снижению времени отработки движения τ_{mov} . Это связано с тем, что при большем числе опорных точек можно обеспечить большую продолжительность времени работы насоса с максимальной частотой вращения вала, т.е. с максимальной подачей рабочей жидкости с увеличением числа опорных точек геометрическая форма закона регулирования $n(x)$ усложняется за счет повышения ее волнистости.

На рис. 12 показано изменение во времени кинематических параметров отработки

поворотного движения звеном манипуляционной системы для оптимального закона частотного регулирования, аппроксимированного различным числом опорных точек. Обозначение графиков соответствует обозначениям на рис. 11. Видно, что с увеличением числа опорных точек и повышением волнистости геометрической формы закона регулирования $n(x)$ наблюдается повышение уровня нестационарности изменения кинематических параметров движения звена манипуляционной системы. Особенно это характерно для графиков изменения во времени величины углового ускорения, хотя при этом и отсутствуют интервалы движения с торможением, т.е. с отрицательным ускорением. Для $J = 13$ и 15 максимальное значение углового ускорения достигает 14 и 16 град/с² соответственно, что в $\sim 1,5 \dots 2,0$ раза меньше, чем в случае $J = 5$. Такое повышение нестационарности изменения угловой скорости и углового ускорения следует рассматривать как отрицательный эффект задания закона регулирования с помощью повышенного числа опорных точек.

На рис. 13 и 14 показано изменение во времени гидродинамических параметров при отработке поворотного движения звеном манипуляционной системы для оптимального закона частотного регулирования, аппроксимированного различным числом опорных точек. Обозначение графиков соответствует обозначениям на рис. 11. Отмеченная при анализе графиков на рис. 12 увеличивающаяся нестационарность кинематических параметров при повышении числа опорных точек J характерна также и для изменения во времени величин давлений и объемных расходов рабочей жидкости в характерных точках гидросистемы механизма движения звена манипуляционной системы.

7. Заключение

Разработка методов оптимального синтеза законов частотного регулирования является, без сомнения, актуальной и практически значимой инженерной задачей. Целенаправленное задание закона частотного регулирования движения отдельных звеньев крановых мани-

пуляционных систем позволяет в достаточно широких пределах регулировать время отра-

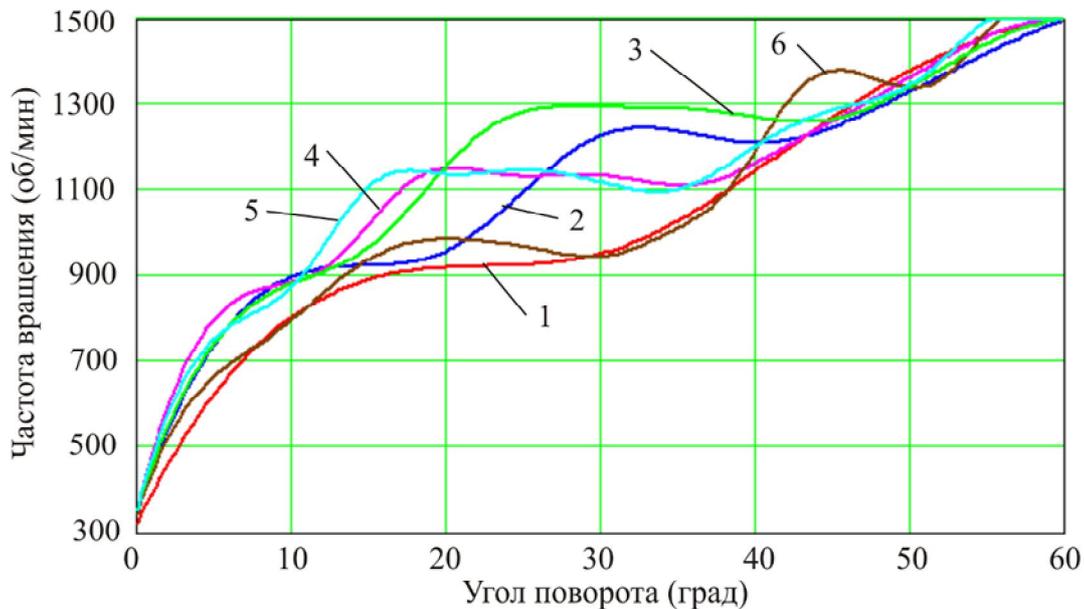


Рис. 11. Графики оптимального закона частотного регулирования в зависимости от числа опорных точек: 1 - $J = 5$; 2 - $J = 7$; 3 - $J = 9$; 4 - $J = 11$; 5 - $J = 13$; 6 - $J = 15$

ботки требуемого движения, его кинематические и динамические параметры.

Одним из факторов, определяющих оптимальную геометрическую форму закона частотного регулирования гидропривода механизмов движения манипуляционных систем мобильных транспортно-технологических машин, является число опорных точек задания функции $n(x)$. В результате выполненных исследований было показано, что с увеличением числа опорных точек наблюдается повышение волнистости геометрической формы закона регулирования $n(x)$ и, как следствие, повышение уровня нестационарности изменения кинематических параметров движения звена манипуляционной системы и гидродинамических параметров (давления и объемного расхода рабочей жидкости), характеризующих протекание рабочих процессов в гидросистеме мобиль-

ной машины. Рациональное число опорных точек составляет 5...7.

Разработанная математическая модель и реализующая ее компьютерная программа синтеза оптимальных законов частотного регулирования гидроприводов механизмов движения звеньев может быть использована для создания систем адаптивного с обратной связью автоматического управления работой манипуляционных систем, что позволит расширить их функциональные возможности, в частности, повысить точность обработки и обеспечить необходимую траекторию движения груза, лимитировать уровень ударных воздействий на опасный или хрупкий груз, реализовать систему мер по предотвращению аварийных ситуаций с мобильной транспортно-технологической машиной.

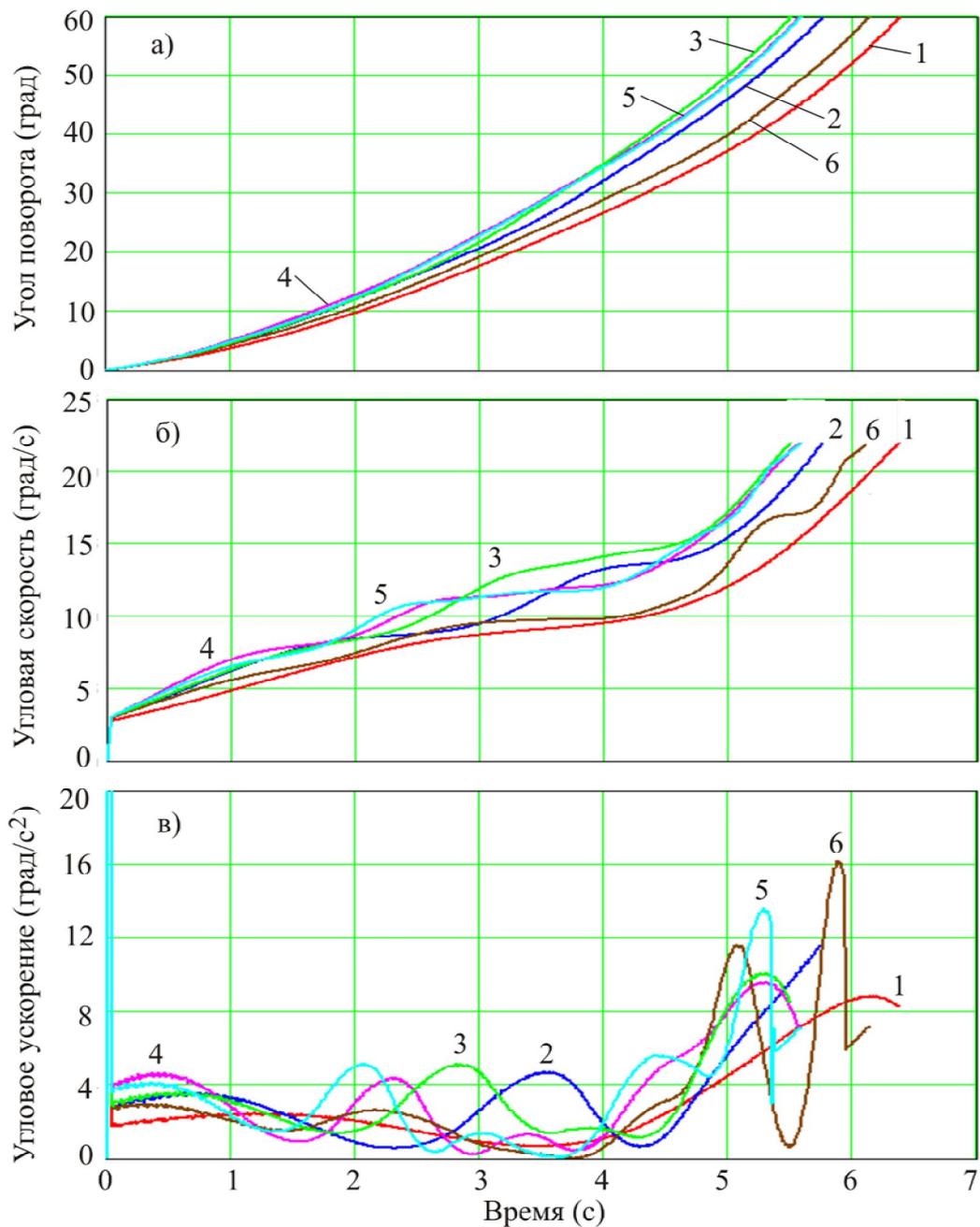


Рис. 12. Графики изменения во времени кинематических параметров поворотного движения звена: а - угла поворота; б - угловой скорости; в – углового ускорения

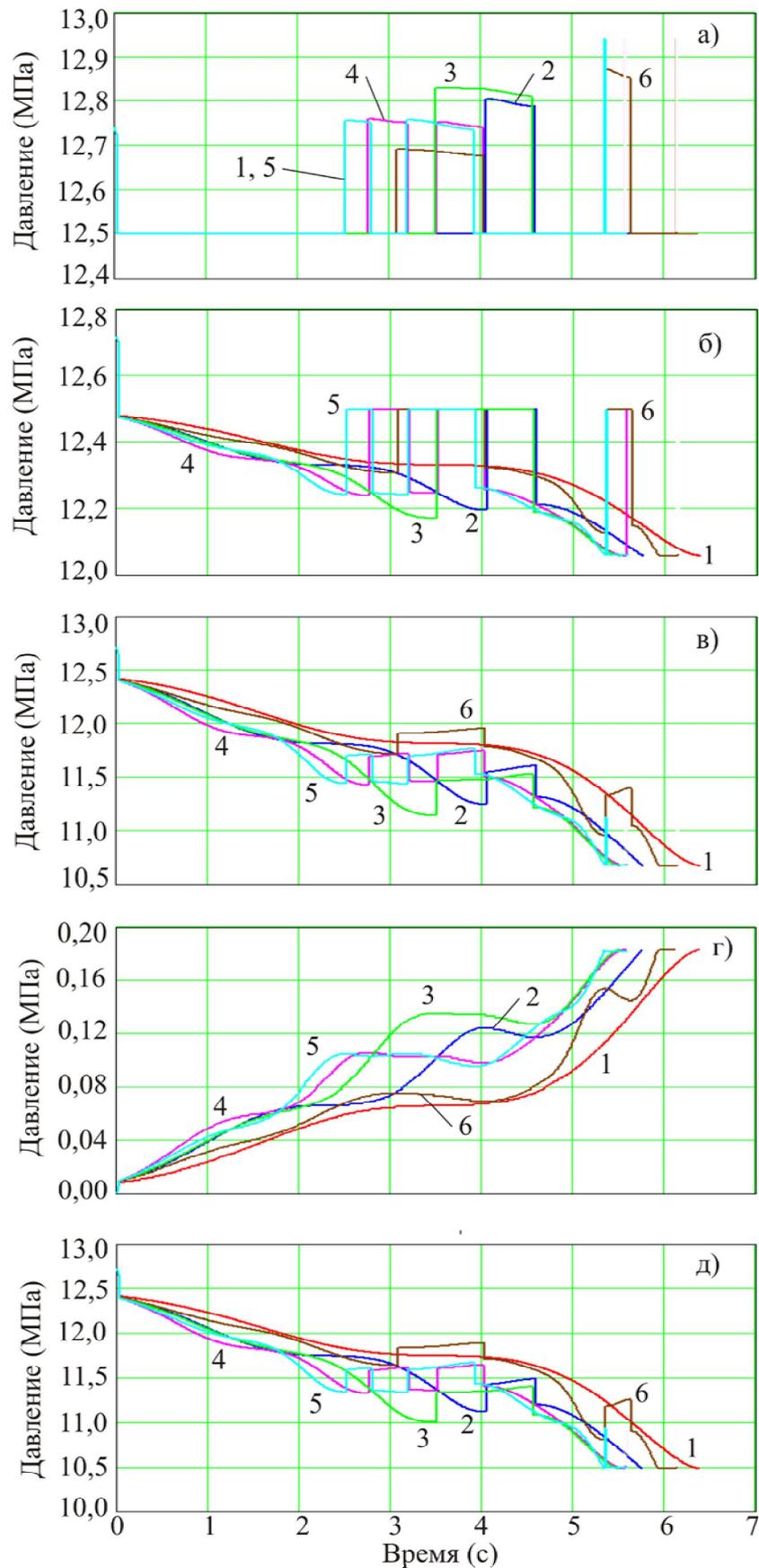


Рис. 13. Графики изменения во времени давления в характерных точках гидросистемы:
а – выход насоса; б – предохранительный клапан; в – вход гидроцилиндра;

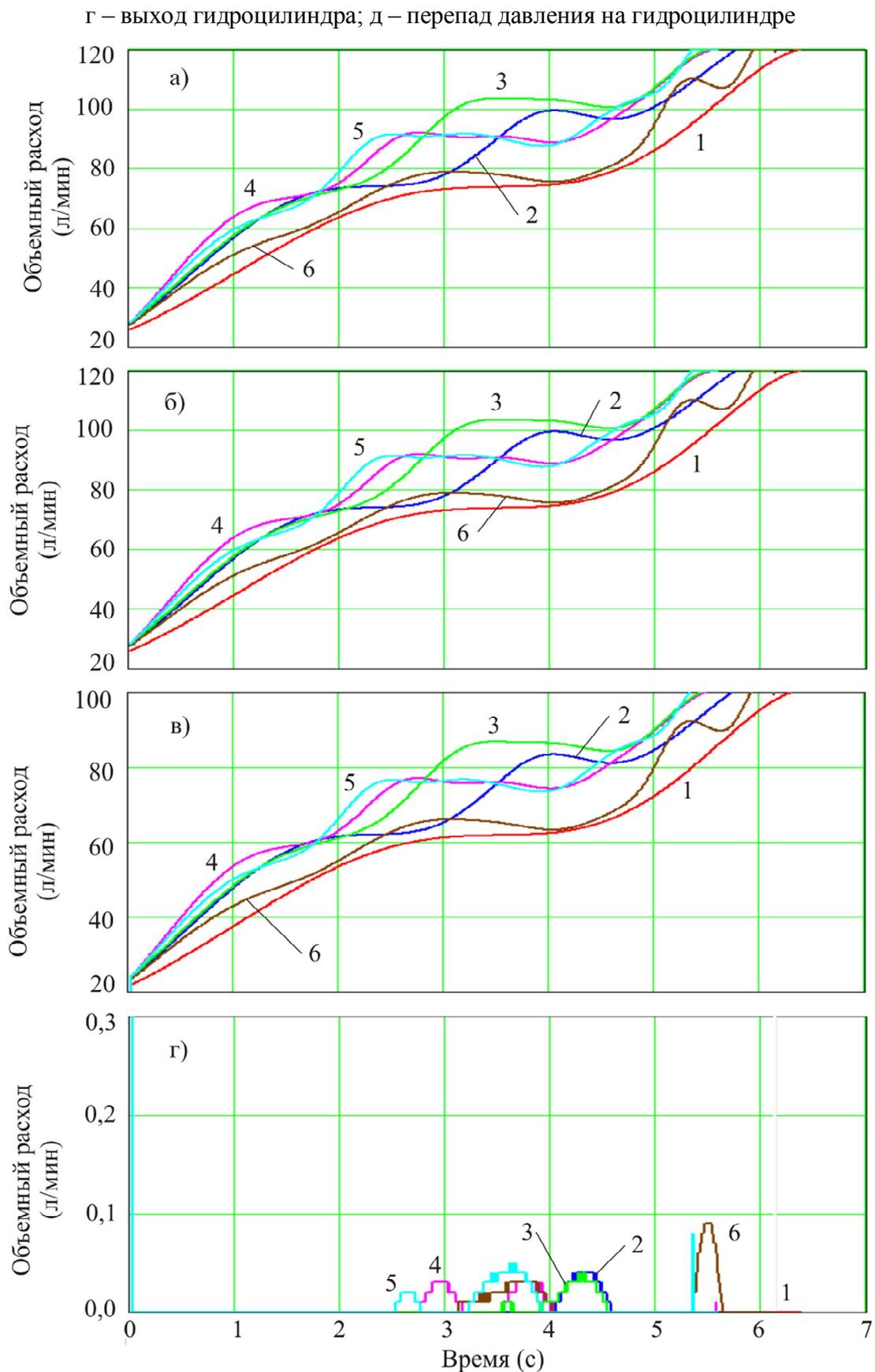


Рис. 14. Графики изменения во времени объемного расхода в характерных точках гидросистемы: а – выход насоса; б – вход гидроцилиндра; в – выход гидроцилиндра; г – расход через предохранительный клапан

Список литературы

1. Вайнсон, А.А. Подъемно-транспортные машины / А.А. Вайнсон. – М.: Машиностроение, 1989. – 536 с.
2. Белецкий, Б.Ф. Строительные машины и оборудование / Б.Ф. Белецкий, И.Г. Булгакова. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2005. – 608 с.
3. Новоселов, В. Время перемен. Российский рынок гидроманипуляторов / В. Новоселов // Строительная техника и технологии. – 2013. – №4. – С. 98-110.
4. Бандурин, Р.А. Рынок кранов-манипуляторов в России / Р.А. Бандурин // Проблемы современной экономики. – 2015. – № 26. – С. 138-142.
5. Васильченко, В.А. Гидравлический привод строительных, дорожных, коммунальных и других мобильных машин (производства России и стран СНГ): каталог-справочник / В.А. Васильченко. – М.: АО «Машмир» и ЗАО «Гидрокомплект», 1997. – 271 с.
6. Лагереv, И.А. Сравнительный анализ характеристик кранов-манипуляторов отечественных и зарубежных производителей / И.А. Лагереv // Подъемно-транспортное дело. – 2016. – №1-2. – С. 7-10.
7. Лагереv, И.А. Современная теория манипуляционных систем мобильных многоцелевых транспортно-технологических машин и комплексов. Конструкции и условия эксплуатации / И.А. Лагереv, А.В. Лагереv. – Брянск: РИО БГУ, 2018. – 190 с. <https://doi.org/10.5281/zenodo.1294622>
8. Лагереv, И.А. Сравнительный анализ гидравлических кранов-манипуляторов транспортно-технологических машин и гидравлических манипуляторов промышленных роботов / И.А. Лагереv // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. – 2016. – №3. – С. 16-43. DOI: 10.5281/zenodo.1198767
9. Garby, R.G. IPT's Crane and Rigging Handbook: mobile-EOT-tower cranes / R.G. Garby. - IPT Publishing and Training Ltd, 2005.
10. Башта, Т.М. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы / Т.М. Башта, С.С.

References

1. Vaynson A.A. *Podemno-transportnyye mashiny* [Lifting-transport machines]. Moscow, Mashinostroenie, 1989. 536 p. (In Russian)
2. Beletskiy B.F. *Stroitelnye mashiny i oborudovaniya* [Construction machinery and equipment]. Rostov-na-Donu, Feniks, 2005. 608 p. (In Russian)
3. Novoselov V. *Vremya peremen. Rossiyskiy rynek gidromanipulyatorov*. *Stroitel'naya tekhnika i tekhnologii*, 2013, No.4, pp. 98-110. (In Russian)
4. Bandurin R.A. *Rynok kranov-manipulyatorov v Rossii* [The market for cranes in Russia]. *Problemy sovremennoy ekonomiki*, 2015, No.26, pp. 138-142. (In Russian)
5. Vasilchenko V.A. *Gidravlicheskiy privod stroitelnykh, dorozhnykh, kommunal'nykh i drugikh mobilnykh mashin (proizvodstva Rossii i stran SNG): catalog-spravochnik* [Hydraulic drive of construction, road, municipal and other mobile machines]. Moscow, AO "Mashmir" i ZAO "Gidrokomplekt", 1997. 271 p. (In Russian)
6. Lagerev I.A. *An characteristics analysis of articulating cranes of domestic and foreign producers*. *Podemno-transportnoe delo*, 2016, No. 1-2, pp. 8-10. (In Russian)
7. Lagerev I.A., Lagerev A.V. *Sovremennaya teoriya manipulatsionnykh system mobilnykh mnogotselovykh transportno-tekhnologicheskikh mashin i kompleksov. Konstruktsiya i usloviya ekspluatatsii* [Modern theory of manipulation systems of mobile multi-purpose transport and technological machines and complexes. Design and operating conditions]. Bryansk, Academician I.G. Petrovskii Bryansk State University, 2018. 190 p. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.1294622> (In Russian)
8. Lagerev I.A. *Comparative analysis of hydraulic crane-manipulating installations transport and technological machines and industrial robots hydraulic manipulators*. *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2016, No.3, pp. 16-49. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.1198767>

Руднев, Б.Б. Некрасов и др. – М.: Машиностроение, 1982. – 423 с.

11. Свешников, В.К. Гидрооборудование: Международный справочник: в 3 кн. / В.К. Свешников. – М.: «Техинформ» МАИ, 2001.

12. Галдин, Н.С. Гидравлические схемы мобильных машин / Н.С. Галдин, И.А. Семенова. – Омск: СибАДИ, 2013. – 203 с.

13. Лагереv, А.В. Современная теория манипуляционных систем мобильных многоцелевых транспортно-технологических машин и комплексов. Исследование рабочих процессов и проектирование элементов гидропривода / А.В. Лагереv, И.А. Лагереv. – Брянск: РИО БГУ, 2019. – 201 с. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3268490>

14. Трифонова, Г.О. Следящие системы приводов / Г.О. Трифонова, О.И. Трифонова. – М.: МАДИ, 2013. – 142 с.

15. Частотно-регулируемый привод [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Частотно-регулируемый_привод.

16. Преимущества частотного регулирования электродвигателя [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://частотники.рф/prim.html>.

17. Лагереv, А.В. Моделирование рабочих процессов в частотно-регулируемом гидроприводе манипуляционных систем мобильных машин при раздельном движении звеньев / А.В. Лагереv, И.А. Лагереv // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. – 2019. - № 2. – С. 187-209.

DOI: <https://doi.org/10.22281/2413-9920-2019-05-02-187-209>

18. Лагереv, А.В. Моделирование рабочих процессов в дроссельно-регулируемом гидроприводе манипуляционных систем мобильных машин при раздельном движении звеньев / А.В. Лагереv, И.А. Лагереv // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. – 2018. - №4. – С. 355-379.

DOI: <https://doi.org/10.22281/2413-9920-2018-04-04-355-379>

19. Лагереv, А.В. Оптимизация конструкции крана-манипулятора машины для

(In Russian)

9. Garby R. G. *IPT's Crane and Rigging Handbook: mobile-EOT-tower cranes*. IPT Publishing and Training Ltd, 2005.

10. Bashta T.M., Rudnev S.S., Nekrasov B.B. *Gidravlika, gidromashiny i gidroprivody* [Hydraulics, hydraulic machines and hydraulic drives]. Moscow, Mashinostroenie, 1982. 424 p. (In Russian)

11. Sveshnikov V.K. *Gidrooborudovanie. Mezhdunarodnyy spravochnik* [Hydraulic Equipment. International Directory]. Moscow, Tekhinform MAI, 2001. (In Russian)

12. Galdin N.S., Semenova I.A. *Gidravlicheskie sistemy mobilnikh mashyn* [Hydraulic circuits of mobile machines]. Omsk, SibADI, 2013. 203 p. (In Russian)

13. Lagerev A.V., Lagerev I.A. *Sovremennaya teoriya manipulatsionnykh sistem mobilnykh mnogotselovykh transportno-tekhnologicheskikh mashin i kompleksov. Issledovanie rabochikh protsessov i proektirovanie elementov gidroprivoda* [Modern theory of manipulation systems of mobile multipurpose transport and technological machines and complexes. Research of working processes and design of hydraulic drive elements]. Bryansk, Academician I.G. Petrovskii Bryansk State University, 2019. 201 p. ISBN 978-5-9734-0319-5.

DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3268490> (In Russian)

14. Trifonova G.O., Trifonova O.I. *Sledyashchie sistemy privodov* [Drive tracking systems]. Moscow, MADI, 2013. 142 p. (In Russian)

15. *Chastotno-reguliruemyy privod* [site]. Available: http://ru.wikipedia.org/wiki/Частотно-регулируемый_привод (In Russian)

16. *Preimushchestva chastotnogo regulirovaniya elektrodvigatelya* [site]. Available: <http://частотники.рф/prim.html> (In Russian)

17. Lagerev A.V., Lagerev I.A. Modeling of working processes in the frequency-adjustable hydraulic drive of manipulation systems with separate movement of links during operation of mobile machines. *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2019, No.2, pp. 187-209. DOI: <https://doi.org/10.22281/2413-9920-2019-05-02-187-209>

сварки магистральных трубопроводов при модернизации / А.В. Лагерев, И.А. Лагерев // Подъемно-транспортное дело. – 2013. - № 1. – С. 4-6.

20. Инструкция по эксплуатации самоходной энергетической машины АСТ-4-А. – Брянск, 2010. – 26 с.

21. Лагерев, И.А. Проектирование поворотных гидродвигателей для манипуляционных систем мобильных машин на основе многокритериальной оптимизации / И.А. Лагерев, Е.А. Шатунова // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. – 2016. - №4. – С. 34-51. DOI: <https://doi.org/10.22281/2413-9920-2016-02-04-34-51>

22. Реклейтис, Г. Оптимизация в технике: В 2-х кн. Кн. 1 / Г. Реклейтис, А. Равиндран, К.М. Рагсделл. - М.: Мир, 1986. – 349 с.

2019-05-02-187-209 (In Russian)

18. Lagerev A.V., Lagerev I.A. Modeling of working processes in the throttle-adjustable hydraulic drive of manipulation systems with separate movement of links during operation of mobile machines. *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2018, No.4, pp. 355-379. DOI: <https://doi.org/10.22281/2413-9920-2018-04-04-355-379> (In Russian)

19. Lagerev A.V., Lagerev I.A. Trunk pipeline welding machine crane-manipulator optimization during its modernization. *Podyemno-transportnoe delo*, 2013, No.1, pp. 4-7. (In Russian)

20. *Instruktsiya po ekspluatatsii samokhodnoy energeticheskoy mashiny AST-4-A* [Operating instructions for self-propelled power machine AST-4-A]. Bryansk, 2010. 26 p. (In Russian)

21. Lagerev I.A., Shatunova E.A. Design of turning hydraulic engines for manipulators of mobile machines on the basis of multicriterial optimization. *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2016, No. 4, pp. 34-51.

DOI: <https://doi.org/10.22281/2413-9920-2016-02-04-34-51> (In Russian)

22. Reklaitis G.V., Ravindran A., Ragsdell K.M. Engineering optimization. Methods and applications. John Wiley & Sons, Inc., 1983.