

УДК 531.21

## ПРОГИБЫ ДЛИННОЙ ГИБКОЙ ВЕСОМОЙ НЕРАСТЯЖИМОЙ НИТИ МЕЖДУ ТОЧКАМИ ЕЕ КРЕПЛЕНИЯ

Кравчук А.С., Кравчук А.И., Тарасюк И.А.

Белорусский государственный университет (Минск, Беларусь)

Установлено, что форма провисания нерастяжимой нити, значительно превышающей по длине расстояние между ее креплениями, никак не связана с механическими характеристиками материала нити и ее растяжимостью, а определяется простейшими геометрическими уравнениями. Полученное решение подчеркивает различие между расчетом гибких нитей, длина которых превышает расстояние между креплениями, и нитей, имеющих равную указанному расстоянию или меньшую длину (т.е. нитей с предварительным натяжением). Уточнен метод определения длины провисающей нити, закрепленной между двумя точками, имеющими произвольную разность высот. За счет точного вычисления интегральных длин двух частей нити от точки с минимальной высотой над поверхностью земли до двух точек крепления. Уточнен расчет нагрузок действующих на точки крепления нити.

**Ключевые слова:** *весомая длинная нить, геометрический расчет, цепная линия, свободное провисание каната.*

**DOI:** 10.22281/2413-9920-2018-04-02-138-143

### Введение.

В данной статье рассматривается случай превышения длины подвешиваемой нити над расстоянием между опорами. Этот случай соответствует случаю крепления электрических проводов между опорами. Отметим, что напряженное состояние весомой нити в данном случае хотя и вызывает ее удлинение, но это удлинение незначительно и является пренебрежимо малой величиной относительно уже существующего превышения длины нити над расстоянием между креплениями.

Поэтому в данной статье предполагается, что нить не растяжима.

Для решения задачи не будет использоваться уравнение цепной линии, которое не учитывает поворот касательной и изменение длины проекции [1-3]. При значительном превышении длины нити расстояния между креплениями эта гипотеза может вносить существенные неточности в получаемые результаты. Также необходимо отметить, что известное уравнение цепной линии, выраженное через гиперболический косинус [1-3], очень хорошо приближается параболой и фактически кроме вычислительных сложностей никакого уточнения не несет.

Предлагаемое в данной статье уравнение провисающей нити большой длины будет получено через качественные рассуждения и по сути ближе к решению Бернулли [3], полученному для проекций элемента провисающей нити.

### Постановка и решение предварительной задачи для весомой нерастяжимой нити.

Точки крепления нити имеют значительную разность высот (различные координаты по  $Oy$ ) (рис. 1). Пусть расстояние между точками крепления равно  $\ell$ , а угол  $\alpha$  - угол наклона отрезка, соединяющего точки крепления, к оси  $Ox$ . Будем предполагать, что точки крепления имеют координаты  $a = (0,0)$  и  $b = (\ell \cdot \cos(\alpha), \ell \cdot \sin(\alpha))$ . В этих точках нить закреплена шарнирно (с возможностью поворота) по обоим направлениям  $Ox$  и  $Oy$  (рис. 1). Будем считать, что сечение нити имеет постоянную площадь поперечного сечения  $S$ . На нить действует внешняя сила тяжести с ускорением свободного падения  $g$ , а плотность материала нити обозначим через  $\rho$ .

Рассмотри нить длиной  $\ell + \Delta\ell$  (рис. 1). Обозначим кривую провисания нерастяжимой нити как

$$H + tg(\alpha) \cdot x + v(x),$$

где  $H$  - высота точки  $a$  над землей;  $v(x)$  - форма провисания нерастяжимого провода над землей под действие силы тяжести.

В качестве критерия будем использовать условие минимума работы силы тяжести при падении нити на землю (нулевой уровень). Поскольку суммарная работа силы тяжести при падении нити определяется интегральным расстоянием от провода до земли с постоянными константами (ускорением свобод-

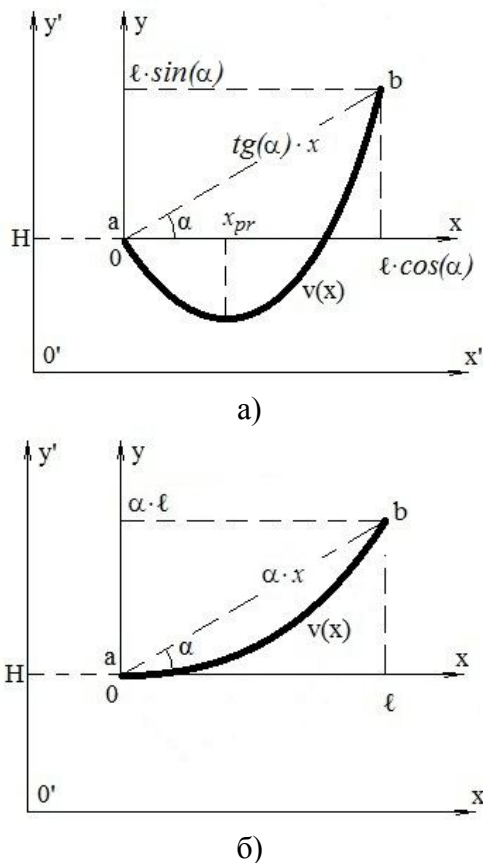


Рис. 1. Варианты расположения свободно висящей нити, длина которой превышает расстояние между точками крепления  $a$  и  $b$  :

- а)  $x_{провис} \in [0, \ell \cdot \cos(\alpha)]$ ; б)  $x_{провис} \notin [0, \ell \cdot \cos(\alpha)]$

ного падения, плотности, поперечного сечения и пр.), то в качестве функции минимизации суммарной потенциальной энергии подвешенной нити следует использовать выражение:

$$\rho g \int_0^{\ell \cdot \cos(\alpha)} [H + x \operatorname{tg}(\alpha) + v(x)] dx \rightarrow \min .$$

Его можно преобразовать к виду

$$\int_0^{\ell \cdot \cos(\alpha)} [H + x \operatorname{tg}(\alpha) + v(x)] dx = \left( \frac{H}{\ell \cos(\alpha)} + \frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{2} \right) \times \times \ell^2 \cos(\alpha)^2 + \int_{-\ell \cdot \cos(\alpha)/2}^{\ell \cdot \cos(\alpha)/2} v(\xi) d\xi \rightarrow \min, \quad (1)$$

где  $\xi = x - \ell/2 \cdot \cos(\alpha)$ .

Из (1) следует, что для того, чтобы минимизировать последнее выражение, необходимо исследовать на максимум абсолютную величину последнего слагаемого в (1):

$$- \int_{-\ell \cdot \cos(\alpha)/2}^{\ell \cdot \cos(\alpha)/2} v(\xi) d\xi \rightarrow \max . \quad (2)$$

Будем предполагать, что  $v(\xi)$  имеет постоянный вид для любого  $\ell$ . В силу симметрии относительно середины отрезка  $\ell \cos(\alpha)$  действующей нагрузки в потенциальном поле силы тяжести можно указать, что  $v(\xi)$  необходимо должна быть четной функцией относительно точки  $\xi = 0$ , при этом в силу закрепления нити по обоим концам должно быть выполнено условие  $v(\xi)|_{\xi=\pm \ell \cdot \cos(\alpha)/2} = 0$ .

Кроме того, поскольку сила тяжести действует как равномерно распределенная нагрузка, а не сосредоточенная в середине нити, то  $v(\xi)$  для провисающей нити удовлетворяет требованию гладкости в вершине  $\frac{dv(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 0$ .

Отметим также еще одно очевидное геометрическое свойство провисающей нити: как бы не расставлялись дополнительные точки крепления на уже подвешенной и провисающей нити, ее кривизна в вершине не изменяется.

С учетом всех требований решениями уравнения (2) является простейшая функция

$$v(\xi) = \frac{C}{\ell \cos(\alpha)} \left( \xi^2 - \left( \frac{\ell \cos(\alpha)}{2} \right)^2 \right),$$

где  $C$  - константа, определяемая исходя из длины кривой провисания.

Переходя к исходным координатам, получаем окончательный результат:

$$v(x) = Cx \left( \frac{x}{\ell \cos(\alpha)} - 1 \right).$$

Соответственно, общее уравнение провисания  $V(x)$  произвольно закрепленной нерастяжимой нити можно записать (рис. 1):

$$V(x) = x \operatorname{tg}(\alpha) + Cx \left( \frac{x}{\ell \cos(\alpha)} - 1 \right). \quad (3)$$

Если рассматривать параболу вида (3), то ее длина  $L$  на отрезке  $[0, \ell \cos(\alpha)]$  определяется интегралом [4]:

$$L = \int_0^{\ell \cdot \cos(\alpha)} \sqrt{1 + \left( \frac{dV}{dx} \right)^2} dx = \int_0^{\ell \cdot \cos(\alpha)} \sqrt{1 + \left( \operatorname{tg}(\alpha) + C \left( 2 \frac{x}{\ell} - 1 \right) \right)^2} dx =$$

$$= \ell \left( 1 + \frac{\cos^4(\alpha)}{6} C^2 - \frac{\cos^6(\alpha) [3 - 5 \cos(2\alpha)]}{80} C^4 + o(C^6) \right).$$

Далее предположим, что  $C/\sqrt{6} < 1$  и, соответственно, длина указанной выше параболы на отрезке  $[0, \ell \cos(\alpha)]$  будет определяться выражением:

$$\ell + \Delta\ell = L \approx \ell \left( 1 + \frac{\cos^4(\alpha)}{6} C^2 \right). \quad (4)$$

Из выражения (4) можно получить, что

$$\Delta\ell \approx \cos^4(\alpha) \frac{C^2}{6} \ell.$$

Откуда следует, что

$$C \approx \sqrt{6\Delta\ell/\ell} \cos^{-2}(\alpha).$$

Из предположения  $C < 2$  можно получить еще одно неравенство, оценивающее допустимое сочетание параметров в постановке данной задачи:

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} < \cos^4(\alpha). \quad (5)$$

Исходя из неравенства (5), можно утверждать, что соотношение (4) верно при

$$\Delta\ell < \ell \cos^4(\alpha),$$

т.е. геометрическая теория будет верна, например, при горизонтально подвешенной нити ( $\alpha = 0$ ) даже когда длина нити будет превышать расстояние между креплениями почти на 100%.

Таким образом, для решения поставленной задачи для нерастяжимой нити уравнение провисания  $V(x)$  произвольно закрепленной нерастяжимой нити (3) можно записать выражением:

$$V(x) = x \operatorname{tg}(\alpha) + \sqrt{6 \frac{\Delta\ell}{\ell \cos^4(\alpha)}} x \left( \frac{x}{\ell \cos(\alpha)} - 1 \right). \quad (6)$$

Необходимо отметить, что уравнение (6) провисающей нити не содержит в себе никаких физических факторов в отличие от общеизвестных решений [1-3, 5].

Отметим, что парабола заданной длины  $\ell + \Delta\ell$ , проведенная через две точки  $a$  и  $b$ , является единственной и, соответственно, не может зависеть ни от плотности материала нити, ни от ее площади поперечного сечения, ни от величины ускорения свободного

падения (иначе парабола заданной длины и закрепленных в одних и тех же точках должно быть бесконечно много). Поэтому предлагаемое решение в виде (6) представляется более адекватным, чем решения для цепной линии и для висящего каната [1-3].

Очевидно, что при значительных  $\Delta\ell$  и  $\alpha$  провисание гибкой нити в большей степени будет определяться только геометрическими параметрами и решением (6), а не ее растяжимостью под действием силы тяжести. Это объясняется тем, что геометрически превышение длины нити над расстоянием между точками креплений многократно превосходит ее удлинение за счет действия силы тяжести.

Определим минимальное расстояние от поверхности земли до провисающей нити и назовем это стрелой провисания. Для этого про дифференцируем (6) и приравняем это выражение к нулю:

$$\operatorname{tg}(\alpha) + \sqrt{6 \frac{\Delta\ell}{\ell \cos^4(\alpha)}} \left( 2 \frac{x}{\ell \cos(\alpha)} - 1 \right) = 0.$$

Проведя очевидные преобразования, получаем координату на отрезке  $[0, \ell \cdot \cos(\alpha)]$  наименьшего расстояния от нерастяжимой нити до линии горизонта связанной с левой точкой крепления  $a$  (рис. 1):

$$x_{\text{провис}} = \frac{\ell \cos(\alpha)}{2} \left( 1 - \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \sqrt{\frac{\ell \cos^4(\alpha)}{6\Delta\ell}} \right).$$

Очевидно, чтобы  $x_{\text{провис}} \in [0, \ell \cos(\alpha)]$  должно быть выполнено условие:

$$\Delta\ell \geq \operatorname{tg}^2(\alpha) \cos^4(\alpha) \frac{\ell}{6}.$$

Величина минимальной высоты от уровня горизонта будет определяться из уравнения (6) по формуле

$$H_{\min} = H + V(x_{\text{провис}})$$

при  $x_{\text{провис}} \in [0, \ell]$ :

$$\begin{aligned} H_{\min} &= H + V(x) = \\ &= H + \frac{\ell \sin(\alpha)}{2} \left( 1 - \frac{\sin(2\alpha)}{2} \sqrt{\frac{\ell}{6\Delta\ell}} \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{6\Delta\ell\ell}}{4 \cos(\alpha)} \left( 1 - \frac{\sin^2(2\alpha)}{4} \cdot \frac{\ell}{6\Delta\ell} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

**Увеличение длины нерастяжимой нити при нагревании.**

Пусть нить является нерастяжимой, но может увеличиваться в связи с нагреванием. Обозначим через  $\gamma$  коэффициент линейного теплового расширения материала нити. Очевидно, что если нерастяжимая нить длиной  $\ell + \Delta\ell$  попала в однородное температурное поле, то ее длина изменится на величину

$$\varepsilon_{темн} \ell,$$

где  $\varepsilon_{темн} = \gamma \Delta T$ ;  $\Delta T$  - приращение температуры.

Очевидно, чтобы использовать температурные свойства при расчете стрелы провисания ненапрянутой недеформируемой гибкой нити, необходимо задаться точными значениями угла  $\alpha$  и длины  $\ell + \Delta\ell$  нити при нормальной температуре (например, при 20°С). И затем учитывать изменение ее формы ее провисания с учетом изменения длины при отклонениях  $\Delta T$  от нормальной температуры по формуле:

$$V^T(x) = x \operatorname{tg}(\alpha) + \sqrt{6 \frac{\Delta\ell + \gamma \Delta T \ell}{\ell \cos^4(\alpha)}} x \left( \frac{x}{\ell \cos(\alpha)} - 1 \right). \quad (8)$$

Все вычисления для случая учета термических удлинений верны, когда соблюдаются ранее принятые геометрические ограничения:

$$0 \leq \alpha < 20^\circ; \quad (\Delta\ell + \gamma \Delta T) / \ell < 0,1.$$

Из зависимости (8) координата максимального сближения нерастяжимой нити с поверхностью земли при ее провисании определяется как:

$$x_{провис, T} = \frac{\ell \cos(\alpha)}{2} \left( 1 - \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \sqrt{6 \frac{\Delta\ell + \gamma \Delta T \ell}{\ell \cos^4(\alpha)}} \right).$$

Как и ранее, чтобы  $x_{провис, T} \in [0, \ell \cos(\alpha)]$  должно быть выполнено условие:

$$\Delta\ell \geq \left( \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha) \cos^4(\alpha)}{6} - \gamma \Delta T \right) \ell.$$

Минимальную высоту над линией горизонта, связанной с точкой  $x_{провис, T}$ , можно вычислить по аналогии с формулой (7):

$$H_{\min, T} = H + V^T(x_{провис, T}).$$

**Определение величины сил, действующих в точках крепления гибкой нити, длина которой превосходит расстояние между точками крепления.**

Следует отметить, что обычно  $\Delta\ell$  значительно превосходит тепловое изменение длины нити  $\gamma \Delta T \ell$ . При этом при тепловых изменениях длины происходит фактическое уменьшение плотности, так как объем нити увеличился при нагревании, а ее общий вес остался без изменений в следующих уравнениях. Тепловое удлинение должно компенсироваться изменением плотности и расчет силовых факторов (реакций в точках крепления) должен свестись к расчету этих же реакций, но без учета температуры.

Поэтому все дальнейшие исследования выполнены без учета влияния температуры.

Весомая гибкая нить, провисая под действием силы тяжести, создает реакции в креплениях нити в точках  $a$  и  $b$  (рис. 1). Если  $x_{провис, T}$  выходит за пределы отрезка  $[0, \ell \cos(\alpha)]$  (рис. 1, б), то весь вес нити приходится на самую высокую опору, т.е. точку  $b$ , и вычисляется по формуле:

$$P_b = g \rho S \int_0^\ell \sqrt{1 + \left( \frac{dU_0^T(x)}{dx} \right)^2} dx = g \rho S \ell \left( 1 + \frac{\Delta\ell}{\ell} \right).$$

Горизонтальная составляющая  $F_b$ , действующая на точку крепления  $b$ , определяется с помощью производной функции (8) в точке  $b$ :

$$|F_b| = \left| \frac{P_b}{\frac{d}{dx} V^T \Big|_{x=\ell \cos(\alpha)}} \right| = \frac{g \rho S (\ell + \Delta\ell)}{\operatorname{tg}(\alpha) + \sqrt{6 \frac{\Delta\ell}{\ell \cos^4(\alpha)}}}.$$

Величина осевого растягивающего напряжения, действующего на провисающую нить (с учетом того, что  $|F_a| = |F_b|$ ), определяется выражением:

$$\sigma_{oc, \max}^0 = \frac{\sqrt{P_b^2 + F_b^2}}{S}.$$

В случае, когда  $x_{провис} \in (0, \ell)$  (рис. 1, а), вес нити распределяется между двумя опорами. Произведем расчет величин вертикально действующих нагрузок в креплениях нити по разрезной схеме, т.е. будем предпо-

лагать, что в точке минимума функции (8)  $x_{\text{провис}}$  нить разрезана.

В этом случае, следуя [5], можно рассмотреть правую часть нити, отбросив левую и заменив горизонтальную силу, действующую на правый участок со стороны отброшенной части, закреплением по направлению  $Ox$ .

Аналогично рассматривается левый участок весомой нити с соответствующим закреплением в той же точке  $x_{\text{провис}}$ . В точке  $x_{\text{провис}}$  ни правая часть весомой нити, ни левая часть не будут иметь других реакций, кроме горизонтальных (т.е. направленных вдоль  $Ox$ ) [5].

Тогда можно точно посчитать вес  $P_a$  и  $P_b$  каждой из частей нити и, соответственно, величину реакции опор:

$$P_a = g \rho S \int_0^{x_{\text{провис}}} \sqrt{1 + \left( \frac{dU_0^T(x)}{dx} \right)^2} dx =$$

$$= g \rho S \frac{\ell^{3/2} \cos^2(\alpha)}{3\sqrt{6\Delta\ell}} \times$$

$$\times \left( -1 + \left( 1 + \operatorname{tg}(\alpha) - \sqrt{6 \frac{\Delta\ell}{\ell \cos^4(\alpha)}} \right)^{3/2} \right).$$

и

$$P_b = g \rho S \int_{x_{\text{провис}}}^{\ell \cos(\alpha)} \sqrt{1 + \left( \frac{dU_0^T(x)}{dx} \right)^2} dx =$$

$$= g \rho S \frac{\ell^{3/2} \cos^2(\alpha)}{3\sqrt{6\Delta\ell}} \times$$

$$\times \left( -1 + \left( 1 + \operatorname{tg}(\alpha) + \sqrt{6 \frac{\Delta\ell}{\ell \cos^4(\alpha)}} \right)^{3/2} \right).$$

Далее с использованием производной (8) можно определить величины горизонтальных сил, действующих в точках крепления нити  $F_a$  и  $F_b$ , при  $x_{\text{провис}} \in (0, \ell \cos(\alpha))$ :

$$F_a = \left| \frac{mg}{\frac{d}{dx} V^T(x)} \Big|_{x=0} \right| = \frac{P_a}{\sqrt{6 \frac{\Delta\ell}{\ell} - \operatorname{tg}(\alpha)}};$$

$$F_b = \left| \frac{mg}{\frac{d}{dx} V^T(x)} \Big|_{x=\ell \cdot \cos(\alpha)} \right| = \frac{P_b}{\sqrt{6 \frac{\Delta\ell}{\ell} - \operatorname{tg}(\alpha)}}.$$

Силы, действующие горизонтально в точке  $x_{\text{провис}} \in (0, \ell)$ , имеют максимальное значение и равны:

$$F_a + F_b.$$

Осевое напряжение  $\sigma_{oc, \max}$ , действующее в точке  $x_{\text{провис}}$ , максимально и равно:

$$\sigma_{oc, \max} = \frac{F_a + F_b}{S} = \frac{P_a + P_b}{S \sqrt{6 \frac{\Delta\ell}{\ell} - \operatorname{tg}(\alpha)}}.$$

### Заключение.

Установлено, что форма провисания нерастяжимой нити, превышающей по длине расстояние между ее креплениями, никак не связана с механическими характеристиками материала нити и определяется простейшими геометрическими уравнениями, в отличие от предлагаемого в работе [5].

За счет точного вычисления интегральных длин двух частей нити от точки с минимальной высотой над поверхностью земли до двух точек крепления уточнен расчет нагрузок действующих на точки крепления нити.

Полученное в данной статье решение подчеркивает различие между расчетом длинных гибких нитей, превышающих расстояние между креплениями, и нитей, имеющих, равную указанному расстоянию или меньшую длину (т.е. нитей с предварительным натяжением).

### Список литературы

1. Виноградов, Г.Г. Расчет строительных пространственных конструкций / Г.Г. Виноградов. – Л.: Стройиздат, 1990. – 264 с.
2. Меркин, Д.П. Введение в механику гибкой нити / Д.П. Меркин. – М.: Наука, 1980. – 240 с.
3. <http://www.math24.ru/уравнение-цепной-линии.html> (дата обращения 21.10.2017).
4. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. 544 с.

5. <http://www.toehelp.ru/theory/sopromat/15.html> (дата обращения 21.10.2017).

#### Сведения об авторах

Кравчук Александр Степанович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры био- и наномеханики Белорусского государственного университета, [ask\\_belarus@inbox.ru](mailto:ask_belarus@inbox.ru).

Кравчук Анжелика Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент

кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, [anzhelika.kravchuk@gmail.com](mailto:anzhelika.kravchuk@gmail.com).

Тарасюк Иван Александрович – магистр физико-математических наук, аспирант кафедры био- и наномеханики Белорусского государственного университета, [ivan.a.tarasyuk@gmail.com](mailto:ivan.a.tarasyuk@gmail.com).

## DEFLECTIONS OF LENGTH WEIGHT NON-DEFORMABLE YARN BETWEEN POINTS OF ITS FIXING

Kravchuk A.S., Kravchuk A.I., Tarasyuk I.A.

Belarusian State University (Minsk, Belarus)

It has been established that the shape of the sagging of an inextensible yarn that is much longer than the length between fixing points is not related to the mechanical characteristics of the yarn material and its extensibility, but is determined by the simplest geometric equation. The solution obtained emphasizes the difference between the calculation of flexible yarns, the length of which exceeds the distance between the fixing points, and the yarns having a length equal to the distance or a shorter length (that is, yarns with prestressing). The method of determining the length of a sagging yarn fixed between two points having an arbitrary height difference is specified. Clarified the calculation of the loads acting on the fixing points of the yarn.

**Keywords:** *weighty long yarn, geometric calculation, chain line, free rope slack.*

**DOI:** 10.22281/2413-9920-2018-04-02-138-143

#### References

1. Vinogradov G.G. *Raschet stroitelnykh prostranstvennykh konstruktsiy*. Leningrad, Stroyizdat, 1990. 264 p. (In Russian)

2. Merkin D.R. *Vvedenie v mekhaniku gibkoy niti*. Moscow, Nauka, 1980. 240 p. (In Russian)

3. <http://www.math24.ru/уравнение-цепной-линии.html> (accessed 21 October 2017). (In Russian)

4. Bronshteyn I.N., Semendyaev K.A. *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtuzov*. Moscow, Nauka, 1986. 544 p. (In Russian)

5. <http://www.toehelp.ru/theory/sopromat/15.html> (accessed 21 October 2017). (In Russian)

#### Authors' information

Alexander S. Kravchuk – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department “Bio- and nanomechanics” at Belarusian State University, [ask\\_belarus@inbox.ru](mailto:ask_belarus@inbox.ru).

Anzhelika I. Kravchuk – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department “Web Technologies and Computer Modeling” at Belarusian State University, [anzhelika.kravchuk@gmail.com](mailto:anzhelika.kravchuk@gmail.com).

Ivan A. Tarasyuk – Master of Physical and Mathematical Sciences, Postgraduate student of the Department “Bio- and nanomechanics” at Belarusian State University, [ivan.a.tarasyuk@gmail.com](mailto:ivan.a.tarasyuk@gmail.com).

Дата принятия к публикации  
(Date of acceptance for publication)  
27.05.2018

Дата публикации  
(Date of publication):  
25.06.2018

