УДК 621.9

МЕТОДЫ ЦИФРОВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ АНАЛИЗАТОРОВ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В СТАНКАХ С ЧПУ

Ерохин В.В.

Брянский государственный университет имени академика И.Г Петровского (Брянск, Россия)

В статье рассматриваются методы реализация геометрической задачи в станках с ЧПУ с использованием цифровых дифференциальных анализаторов. Рассмотрены достоинства и недостатки реализации интерполяции в системах ЧПУ различными методами, особое внимание уделено общим методам цифровых дифференциальных анализаторов в реализации интерполяции движения рабочих органов станка. Проанализированы методы интерполяции, в которых для численного интегрирования используется метод Эйлера, основанный на разложении функции в ряд Тейлора с отбрасыванием старших (второй и выше) степеней разложения. Показана математическая формализация построения сложных кривых методами цифровых дифференциальных анализаторов – плоских кривых второго порядка, таких как парабола, гипербола, эллипс.

Ключевые слова: *числовое программное управление, качество обработки, интерполяция, технологическое оборудование.*

DOI: 10.22281/2413-9920-2017-03-04-369-373

Данная статья является продолжением и дополнением ранее опубликованных работ [1, 2].

В микропроцессорных системах ЧПУ широко используются только интерполяторы с задающими словами в качестве управляющих сигналов, в которых частота прерываний не зависит от заданной скорости перемещений.

Среди различных методов цифровых дифференциальных анализаторов можно выделить общие методы, различающиеся способом получения числового решения, и частные, различающиеся способом определения производных [3-5].

Общие методы цифровых дифференциальных анализаторов.

Наиболее распространены методы интерполяции, в которых для численного интегрирования используется метод Эйлера, основанный на разложении функции в ряд Тейлора с отбрасыванием старших (второй и выше) степеней разложения. В этом случае

$$Y(X_0+h)=Y_0+h\dot{Y}(X_0)\,, \qquad (1)$$

где h – шаг интерполяции или дискретность перемещения; $Y(X)$ – интерполяционная функция, заданная в явном виде; X_0 – координата начальной точки; $Y_0 = Y(X_0)$.

Для прямой $\dot{Y}(X) = const$ уравнение (1) приобретает вид (метод Л1)

$$Y(X_0+h)=Y(X_0)+h_k\,.$$

Это уравнение можно записать в итеративной форме:

$$Y_{i+1} = Y_i + h_k\,,$$

где $h_k = \dfrac{VL_kT}{L}$; V – контурная скорость; L_k – перемещение по k-й координате; T – такт интерполяции; L - длина перемещения, заданного в кадре.

Исходным уравнением окружности является дифференциальное уравнение второго порядка $\ddot{X}+X=0$, которое легко преобразовать в систему дифференциальных уравнений первого порядка, сделав замену $Y=\dot{X}$. В этом случае $\dot{Y}=\ddot{X}$ и система уравнений первого порядка получит вид

$$\dot{X} = f(X, Y, t) = Y\,;$$
$$\dot{Y} = g(X, Y, t) = -X\,. \qquad (2)$$

Для окружности $h = \dfrac{VT}{R}$ (где R – радиус окружности) при $h > 0$ движение осуществляется по часовой стрелке, а при $h < 0$ – против часовой стрелки. Подставляя уравнение (1) в систему уравнений (2), получим систему уравнений для реализации интерполяционного процесса (метод К1 – метод Эйлера).

$$X_{i+1} = X_i + hY_i\,;$$
$$Y_{i+1} = Y_i - hX_i\,.$$

Так как при решении системы уравнений (2) используется разложение в бесконечный степенной ряд с отбрасыванием старших степеней разложения, точность метода зависит главным образом от ошибки усечения. Для дуги в четверть окружности ошибка по радиусу составит

$$E_r = \frac{\pi R}{h}\left(\sqrt{1+h^2} - 1\right),$$

при малых h ($h << 1$ радиана) -

$$E_r = 0{,}25\pi hR.$$

Можно уменьшить ошибку, используя модификацию метода Эйлера, называемую усовершенствованным методом ломаных, при котором сначала вычисляются промежуточные значения

$$X_{i+0,5} = X_i + 0{,}5\Delta X_i;$$
$$Y_{i+0,5} = Y_i + 0{,}5\Delta Y_i,$$

где ΔX_i, ΔY_i – приращения по координатам X и Y соответственно (рис. 1). В этом случае система уравнений (2) приобретет вид (метод К2)

$$X_{i+1} = X_i + hY_{i+0,5};$$
$$Y_{i+1} = Y_i - hX_{i+0,5}.$$

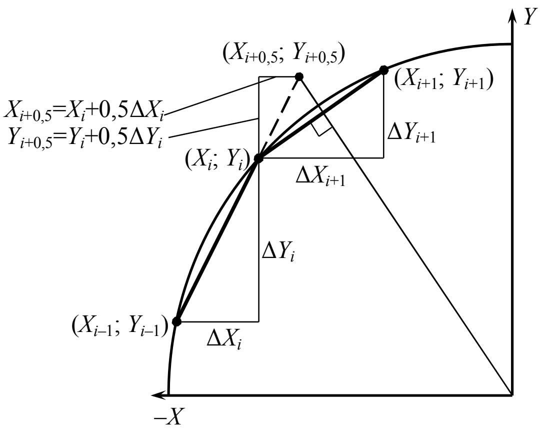

Рис. 1. Интерполяция по методу К2

Ошибка на каждом шаге при использовании этого метода имеет порядок малости h^3. Однако увеличение точности требует дополнительных затрат процессорного времени на вычисление координат промежуточных точек $X_{i+0,5}$ и $Y_{i+0,5}$.

Круговой интерполятор, основанный на применении модифицированного метода Эйлера, используется в системах ЧПУ «Электроника НЦ-31-М» и «Электроника МС 2109». Программная операция умножения в процессорах этих систем позволяет легко реализовать метод К2. Потери на вычисление промежуточных точек являются незначительными, так как требуют дополнительно только одну операцию сдвига и сложения на координату [3, 5].

Другой возможностью уменьшить ошибку является использование уточненного метода Эйлера (метода К3), при котором

$$X_{i+1} = X_{i-1} + 2hY_i;$$
$$Y_{i+1} = Y_{i-1} - 2hX_i,$$

т.е. для определения координат очередной точки используются значения в двух предшествующих точках. Таким образом, при практически одном и том же объеме вычислительной работы можно получить значительно более малую погрешность, чем при обычном методе Эйлера (методе К1). Аппроксимация окружности при использовании метода К3 показана на рис. 2. Алгоритм интерполяции с использованием уточненного метода Эйлера применяется в системе ЧПУ 2С85 и более современных аналогах систем ЧПУ.

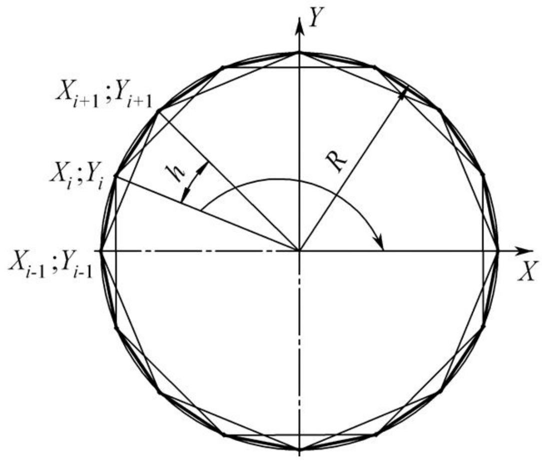

Рис. 2. Интерполяция по методу К3

Методы К2 и К3 не являются самостартующими, т.е. их нельзя применять для вычисления первой точки. В этом случае на первом шаге приходится использовать какой-то другой метод, что создает определенные неудобства и нарушает монотонность программы, реализующей алгоритм круговой интерполяции. Так как вычисления координат точки на аппроксимирующей ломаной производятся в микропроцессорных системах ЧПУ последовательно, то используют алгоритм, при котором для вычисления второй координаты используется новое значение первой (метод К4), т.е.

$$X_{i+1} = X_i + hY_i;$$
$$Y_{i+1} = Y_i - hX_{i+1}.$$

Ошибка E_r достигает максимального значения при интерполировании дуги в четверть окружности. При дальнейшем увеличении дуги ошибка начинает уменьшаться. В этом случае E_r=0,25hR, т.е. имеет порядок малости h, но в π раз меньше, чем при применении метода К1.

Модернизировав алгоритм метода К4, т.е. чередуя последовательность вычисления координат через такт, получим алгоритм круговой интерполяции (метод К5):

$$X_i = X_{i-1} + hY_{i-1}; \quad Y_i = Y_{i-1} - hX_i. \qquad (3)$$

$$Y_{i+1} = Y_i - hX_i; \quad X_{i+1} = X_i + hY_{i+1}. \qquad (4)$$

Ошибка по радиусу при интерполировании дуги в четверть окружности при использовании данного метода составляет E_r=0,5h^2R. Метод можно применять только тогда, когда величина h не изменяется от такта к такту, так как в противном случае появляется дополнительная ошибка, вызванная тем, что значение h при использовании уравнений (3) и (4) различно. При использовании метода интерполяции К6 можно избежать указанного недостатка:

$$X_i = X_{i-1} + 0{,}5hY_{i-1};$$
$$Y_{i+1} = Y_{i-1} - 2hX_i;$$
$$X_{i+1} = X_i + 0{,}5hY_{i+1}.$$

При этом объем вычислений увеличивается незначительно, а алгоритм становится универсальным, так как все вычисления производятся в одном такте (метод К6). Применение метода К6 оправдано, если в системе ЧПУ имеются функции подачи на оборот, разгона и торможения. Алгоритм круговой интерполяции, основанный на методе К6, используется в системе ЧПУ «Электроника МС 2109» [3, 5].

Дальнейшее уменьшение ошибки возможно при использовании методов численного интегрирования с двухкратным и более интегрированием. Одним из наиболее употребимых алгоритмов круговой интерполяции является метод Тейлора (метод К7), при котором уравнения имеют вид

$$X_i = X_{i-1} + hY_{i-1} - 0{,}5h^2X_{i-1};$$
$$Y_i = Y_{i-1} - hX_{i-1} - 0{,}5h^2Y_{i-1}.$$

В этом случае при интерполировании дуги в четверть окружности ошибка составит E_r=0,0625πRh^2, т.е. она имеет порядок малости h^2.

Данный алгоритм использован в системе ЧПУ 2С42-65 и ряде других.

В условиях развития электронно-вычислительной техники можно использовать алгоритм интерполяции с тройным интегрированием, что приводит к значительному уменьшению ошибки интерполяции.

Минимальную ошибку дает метод Рунге-Кутта четвертого порядка, причем с увеличением порядка увеличивается число необходимых вычислений.

Рассмотрены различные методы построения отрезков прямых и дуг окружностей. Возможно построение и более сложных кривых методами цифровых дифференциальных анализаторов, например, плоских кривых второго порядка, таких как парабола, гипербола, эллипс. При построении этих кривых встречаются определенные вычислительные трудности.

При использовании метода Эйлера для интерполирования сложных кривых система уравнений будет иметь вид

$$X_i = X_{i-1} + \frac{L_i}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)^2}};$$

$$Y_i = Y_{i-1} + \frac{L_i}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)^2}},$$

где $L_i = VT$; ∂X, ∂Y – вычисляются в точках X_{i-1} и Y_{i-1}.

В случае окружности

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)^2} = \frac{R}{Y}; \quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)^2} = \frac{R}{X},$$

получаем формулы метода К1. Для любых других кривых второго порядка необходимо вычисление производных и извлечение квадратного корня различными известными методами.

Применение интерполяторов для воспроизведения сложных кривых ограничивается сложностью вычислений производных и извлечения квадратного корня, а также сложностью построения эквидистанты к произвольным кривым второго порядка, так как для всех кривых кроме окружности и эвольвенты эквидистанта не является кривой того же порядка (например, эквидистанта эллипса представляет собой дробно-рациональную кривую, эквивалентную кривой восьмого порядка и, естественно, не может интерполироваться в реальном масштабе времени аппаратными средствами большинством ЧПУ).

Частные методы цифровых дифференциальных анализаторов.

Задачи, решаемые при разработке интерполяторов методами дифференциальных уравнений, отличаются от обычных задач численного интегрирования тем, что при построении интерполяторов заранее известен вид кривой, которая описывается дифференциальным уравнением. Это позволяет использовать различные допущения при нахождении решений.

При построении дуги окружности используется разложение в ряд, при этом в разложении sinα заменяется на α и cosα заменяется 1 (единицей). Такая замена используется и в рассмотренных методах.

Можно упрощать интерполяционные вычисления путём усечения ряда после второго члена, а вычисление производить до начала интерполяции на этапе подготовки. При этом ошибка по радиусу на дуге в четверть окружности составляет E_r=0,0625$\pi h^2 R$. Этот метод увеличивает точность только при h = const, в противном случае значительно увеличивается объем вычислений при расчете.

Сложность нахождения второго и последующих членов разложения в ряд тригонометрических функций показывает, что более перспективными с точки зрения увеличения точности являются методы интерполяции с многократным интегрированием.

Список литературы

1. Ерохин, В.В. Выбор методов реализации геометрической задачи управления устройствами ЧПУ в технологическом оборудовании / В.В. Ерохин // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. – 2017. – №1. – С. 18-25. DOI: 10.22281/2413-9920-2017-03-01-18-25
2. Ерохин, В.В. Реализация геометрической задачи в станках с ЧПУ / В.В. Ерохин // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. – 2017. – №2. – С. 135-141. DOI: 10.22281/2413-9920-2017-03-02-135-141
3. Белов, М.П. Инжиниринг электроприводов и систем автоматизации / М.П. Белов, О.И. Зементов, А.Е. Козярук. – М.: Академия, 2006. – 368 с.
4. Ерохин, В.В. Системы управления производственным процессом / В.В. Ерохин, М.П. Топорков, Т.А. Моргаленко. – Брянск: БГТУ, 2009. – 158 с.
5. Сосонкин, В.Л. Систем числового программного управления / В.Л. Сосонкин, Г.М. Мартинов. – М.: Логос, 2005. – 296 с.

Сведения об авторе

Ерохин Виктор Викторович - доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Автоматизированные информационные системы и технологии» ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского», *erohinvv@mail.ru*.

METHODS OF DIGITAL DIFFERENTIAL ANALYZERS IN THE IMPLEMENTATION OF THE GEOMETRICAL PROBLEM IN CNC METAL CUTTING MACHINES

Erokhin V.V.

Academician I.G. Petrovskii Bryansk State University

The article deals with methods for the implementation of a geometric problem in CNC machines using digital differential analyzers. The advantages and disadvantages of the implementation of interpolation in CNC systems by various methods are considered, special attention is paid to the general methods of digital differential analyzers in the implementation of the interpolation of the movement of the working organs of the machine tool. Interpolation methods are analyzed in which the Euler method is used for numerical integration, based on the expansion of the function in a Taylor series with discarding the highest (second and higher) degrees of expansion. The mathematical formalization of the construction of complex curves is shown by the methods of digital differential analyzers - plane curves of the second order, such as parabola, hyperbola, ellipse.

Keywords: *CNC, machining quality, interpolation, process equipment.*

DOI: 10.22281/2413-9920-2017-03-04-369-373

References

1. Erokhin V.V. Select method of implementing the control device of geometrical problems in the process equipment CNC. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2017, No.1, pp. 18-25. DOI: 10.22281/2413-9920-2017-03-01-18-25 (In Russian)
2. Erokhin V.V. Implementation of the geometrical problem in CNC metal cutting machine. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2017, No.2, pp. 135-141. DOI: 10.22281/2413-9920-2017-03-02-135-141 (In Russian)
3. Belov M.P., Zementov O.I., Kozyaruk A.E. *Inzhiniring elektroprivodov i sistem avtomatizatsii* [Engineering of electric drives and automation systems]. Moscow, Akademiya, 2006. 368 p. (In Russian)
4. Erokhin V.V., Toporkov M.P., Morgalenko T.A. Sistemy upravleniya proizvodstvennym protsessom [Control systems production process]. Bryansk, BSTU, 2009. 158 p. (In Russian)
5. Sosonkin V.L., Martinov G.M. Sistemy chislovogo programmnogo upravleniya [Systems CNC]. Moscow, Logos, 2005. 296 p. (In Russian)

Author' information

Viktor V. Erokhin - Doctor of Technical Sciences, Professor at Academician I.G. Petrovskii Bryansk State University, *erohinvv@mail.ru*.

Дата принятия к публикации
(Date of acceptance for publication)
22.08.2017

Дата публикации
(Date of publication):
25.12.2017