

УДК 539.3

## КРУЧЕНИЕ БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ПО ДЛИНЕ И ПОПЕРЕЧНОМУ СЕЧЕНИЮ ПОРИСТОСТЬЮ

Шляхов С.М., Гаврилов Д.Ю.

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов, Россия

Статья посвящена задаче нахождения уровня вторичных касательных напряжений, возникающих в сечениях из-за переменной по длине пористости. Решение такой задачи позволяет учесть вторичные касательные напряжения при определении несущей способности пористого бруса. Распределение пористости по поперечному сечению задается рациональным образом - исходя из ранее решенных задач по подбору пористости при кручении бруса круглого поперечного сечения, по длине бруса – по линейному закону. Целью исследования является определение уровня вторичных касательных напряжений и оценка их значения.

**Ключевые слова:** пористость, кручение, круг, рациональность, брус, касательные напряжения, модуль сдвига, суперэлемент, вторичные касательные напряжения.

**DOI:** 10.22281/2413-9920-2017-03-02-147-153

Вопросы оптимального проектирования конструкций приобретают в последнее время все большую значимость и актуальность. Имеется ряд направлений оптимизации. Одним из них является управление свойствами внутренней структуры материала. Теоретические исследования по возможности управлять упругими характеристиками при кручении (модулем сдвига  $G$ ) рассматриваются в работах К.А. Лурье [1]. Пример решения рационального распределения модуля сдвига  $G$  по прямоугольному сечению бруса при кручении представлен в работе Рейтмана М.И. и Шапиро Г.С. [2]. Большой вклад в изучение свойств пористых материалов внесли Кашталян Ю.А., Белов С.В., Кингери У.Д., Бутарович Д.О. [3-6]. Пористые материалы обладают рядом специфических свойств: пониженной теплопроводностью, повышенной звукоизоляцией, хорошей ударной вязкостью. Кроме того, в теплоэнергетике пористые материалы являются единственно возможными жаропрочными материалами, выполненными из керамики или пористых металлов, полученных методом порошковой металлургии.

Другим направлением является регулирование свойств материала уровнем пористости. Задачи изгиба брусев пористой структуры разных профилей поперечного сечения подробно рассмотрены в [9-11].

В настоящей работе рассматривается задача оценки уровня вторичных касательных напряжений, возникающих при кручении бруса с переменной по поперечному сечению и длине пористостью. Актуальность

ставящейся задачи обусловлена необходимостью учета вторичных касательных напряжений при оценке несущей способности конструкции.

Рассмотрим сплошной цилиндр радиусом  $r$  и длиной  $l$  с переменной по длине и поперечному сечению пористостью. Торцы цилиндра свободны от закреплений. На цилиндр действует крутящий момент  $M_{кр}$ . Положим, что цилиндр имеет среднюю длину, т.е. ставится задача нахождения уровня вторичных касательных напряжений, возникающих в сечениях из-за переменной по длине пористости. Допускаем, что краевыми эффектами можно пренебречь.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние цилиндра. Для решения задачи используем метод суперэлементов. Разбиваем цилиндр по длине  $l$  на  $m$  коротких цилиндров (суперэлементов), условно называемых «дисками». Длина каждого диска равна шагу разбиения  $h_z = 0,1l$  по оси  $z$ . Распределение пористости по сечению диска задаем квадратичной параболой, как приближенной аппроксимацией результатов решения [7, 8]. В пределах каждого суперэлемента принимаем уровень пористости равномерным по его длине, средним по суперэлементу (рис. 1) на каждом радиусе. В соответствии с методом конечных элементов для оценки напряженно-деформированного состояния отдельного диска разобьем его поперечное сечение по радиусу на  $n$  равных по толщине кольцевых элементов. Известно, что упругие характеристики материала – ка-

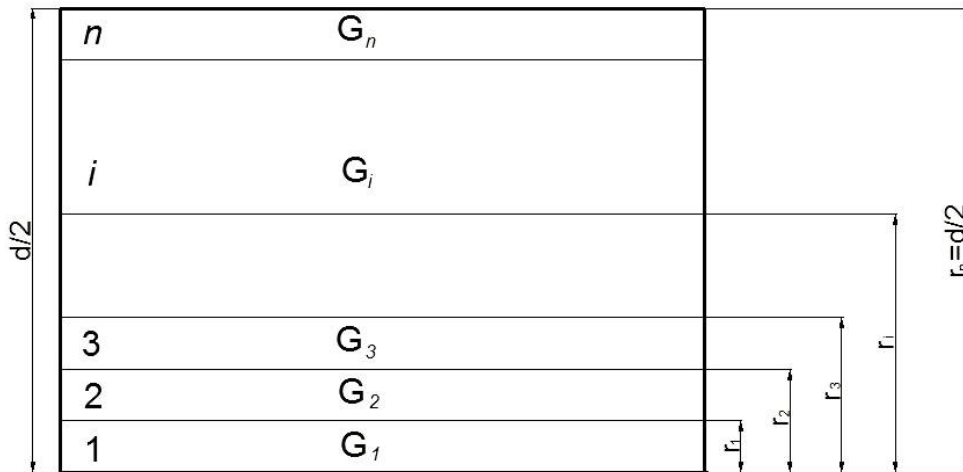


Рис. 1. Схема разбиения поперечного сечения бруса на элементы

сательные напряжения  $\tau$  и модуль сдвига  $G$  являются функциями пористости материала [3, 4]. Соответственно  $G_1, G_2, \dots, G_n$  - модули сдвига отдельных кольцевых элементов;  $r_i, \delta$  - средний радиус кольцевого элемента и его толщина.

В свою очередь, сердцевина бруса считается первым слоем, и, соответственно,  $G_1$  - модуль сдвига сердцевины вала, а  $r_0$  - ее внешний радиус.

Распределяем прикладываемый к валу крутящий момент  $M_{кр}$  по слоям:

$$M_{кр} = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{i=1}^n M_i. \quad (1)$$

Полярные моменты инерции сечения для средней части вала и кольцевых элементов диффузионного слоя определяем по формулам

$$I_{p1} = \frac{\pi d_0^2}{32}; \quad I_{pi} = 2\pi r_i^3 \delta.$$

$$M_{кр} = M_1 + M_1 \frac{G_2 I_{p2}}{G_1 I_{p1}} + M_1 \frac{G_3 I_{p3}}{G_1 I_{p1}} + \dots + M_1 \frac{G_k I_{pk}}{G_1 I_{p1}} = M_1 \left( 1 + \frac{G_2 I_{p2}}{G_1 I_{p1}} + \frac{G_3 I_{p3}}{G_1 I_{p1}} + \dots + \frac{G_k I_{pk}}{G_1 I_{p1}} \right),$$

откуда

$$M_1 = \frac{M_{кр}}{\left( 1 + \frac{G_2 I_{p2}}{G_1 I_{p1}} + \frac{G_3 I_{p3}}{G_1 I_{p1}} + \dots + \frac{G_k I_{pk}}{G_1 I_{p1}} \right)}. \quad (5)$$

Из выражений (3) - (5) получим уравнение для расчета величины крутящего момента в  $i$ -м слое суперэлемента

Принимая во внимание гипотезу плоских сечений и нескривляемости радиусов, запишем условие совместности деформаций для слоев:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \dots = \theta, \quad (2)$$

где  $\theta_i = \frac{M_i}{G_i I_{pi}}$ . Поэтому условие (2) можно записать как

$$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \frac{M_1}{G_1 I_{p1}} = \frac{M_2}{G_2 I_{p2}} \Rightarrow M_2 = M_1 \frac{G_2 I_{p2}}{G_1 I_{p1}}; \quad (3)$$

$$\theta_2 = \theta_3 \Rightarrow \frac{M_2}{G_2 I_{p2}} = \frac{M_3}{G_3 I_{p3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_3 = M_2 \frac{G_3 I_{p3}}{G_2 I_{p2}} = M_1 \frac{G_3 I_{p3}}{G_1 I_{p1}}. \quad (4)$$

Учитывая, что крутящий момент представлен выражением (1), получим:

$$M_i = \frac{M_{кр}}{\sum_{k=1}^i \frac{G_k I_{pk}}{G_1 I_{p1}}}.$$

Возникающие в поперечном сечении сердцевины вала максимальные касательные напряжения определяем по формуле

$$\tau_{1\max} = \frac{M_1}{I_{p1}} r_0.$$

Для тонкостенных слоев расчетная формула касательных напряжений в слое имеет вид

$$\tau_{1(ср)} = \frac{M_i}{I_{pi}} r_i = \frac{M_i}{2\pi r_i^2 \delta}.$$

Поскольку в каждом суперэлементе касательные напряжения  $\tau_{\varphi z}$  имеют свои, отличные от сопряженных элементов значения (рис.2), то нарушается условие совместности деформаций (угла поворота) на стыкуемых поверхностях сечений. Возникают касательные напряжения  $\tau_{\varphi r}$ , которые подчиним уравнению равновесия, которое в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{2\tau_{\varphi r}}{r} = 0$$

или иначе

$$\frac{\partial(r^2 \tau_{\varphi r})}{\partial r} + \frac{\partial(r^2 \tau_{\varphi z})}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

Производную по координате  $z$  в уравнении (6) заменяем ее разностным аналогом

$$\left. \frac{\partial(r^2 \tau_{\varphi z})}{\partial z} \right|_{r=r_i} = \frac{r_i^2 (\tau_{\varphi z_i}^{(2)} - \tau_{\varphi z_i}^{(1)})}{h_z}.$$

Тогда уравнение (6) примет вид

$$\tau_{\varphi r} = \left( \frac{-1}{r^2} \right) \int_0^r \left[ \frac{r_i^2 (\tau_{\varphi z_i}^{(2)} - \tau_{\varphi z_i}^{(1)})}{h_z} \right] dr = \left( \frac{-1}{r^2} \right) \sum_{i=1}^n \left( \frac{r_i^2 (\tau_{\varphi z_i}^{(2)} - \tau_{\varphi z_i}^{(1)})}{h_z} \right) \Delta r, \quad (7)$$

где  $\Delta r = r_{i+1} - r_i = \delta$ .

Выбор нижнего предела интеграла обеспечивает выполнение граничного условия  $\tau_{\varphi r}(r) = 0$ , т.е. отсутствия касательных напряжений на внутренней поверхности цилиндра. Отсчет радиуса в интеграле ведется с половины шага разбиения  $r = 0,5y_i$ .

В качестве примера возьмем брус длиной  $l=1$ м, радиусом  $R=0,25$  м с изменяемой по линейному закону по длине пористостью (рис. 3, а) и изменяющейся по радиусу пористостью (рис. 3, б, в).

Эпюры касательных напряжений представлены на рис. 4.

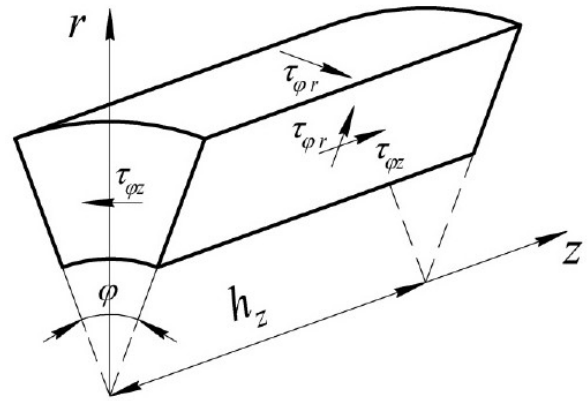


Рис.2. Касательные напряжения, возникающие в суперэлементе

$$\frac{\partial(r^2 \tau_{\varphi r})}{\partial r} = \frac{r_i^2 (\tau_{\varphi z_i}^{(2)} - \tau_{\varphi z_i}^{(1)})}{h_z}.$$

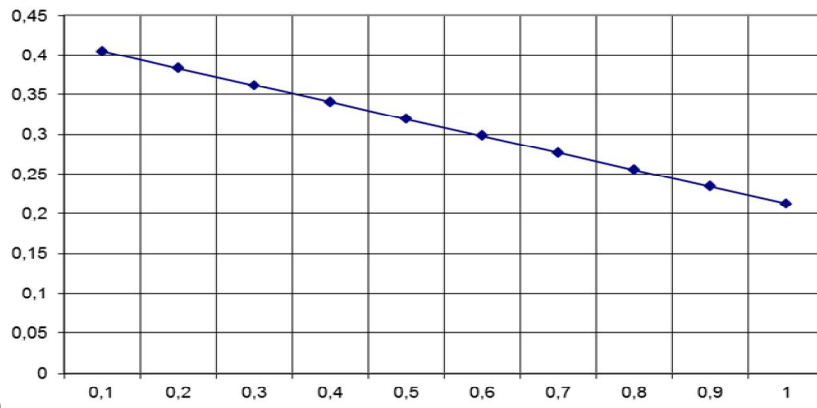
Интегрируя его, получаем:

$$r^2 \tau_{\varphi r} = - \int_0^r \left[ \frac{r_i^2 (\tau_{\varphi z_i}^{(2)} - \tau_{\varphi z_i}^{(1)})}{h_z} \right] dr.$$

Вычислим интеграл по квадратурной формуле, представим функцию  $\tau_{\varphi r}$  в виде:

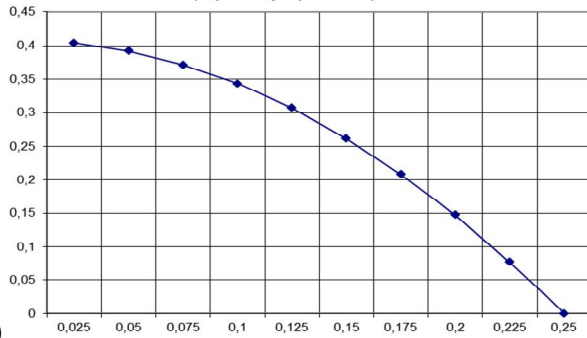
Эпюры вторичных касательных напряжений, построенные на основании уравнения (7) приведены на рис. 5.

Полученные результаты позволяют оценить распределение и уровень касательных напряжений по объему бруса при его кручении. Проведенным расчетом установлено, что абсолютные значения вторичных касательных напряжений незначительны и не оказывают существенного влияния на напряженно-деформированное состояние бруса с переменной по длине и поперечному сечению пористостью при его кручении.



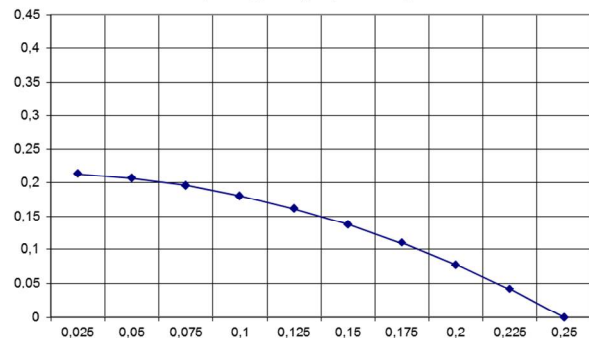
а)

Распределение пористости по поперечному сечению (первый суперэлемент)



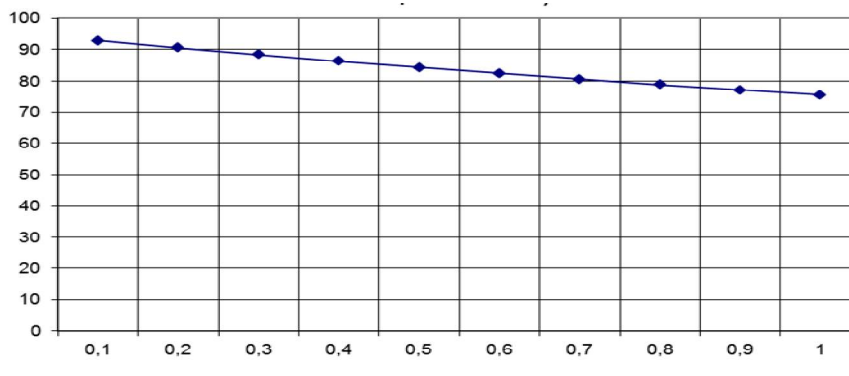
б)

Распределение пористости по поперечному сечению (последний суперэлемент)



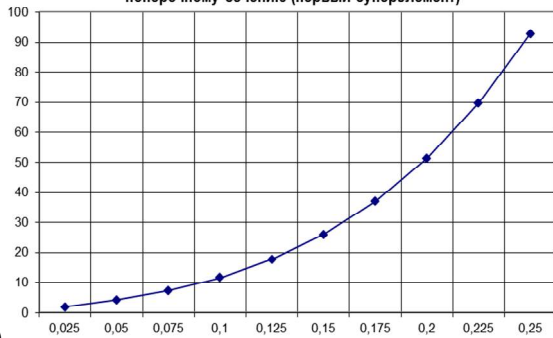
в)

Рис. 3. Распределение пористости в объеме бруса: а - по длине (наружный кольцевой элемент); б - по поперечному сечению (первый суперэлемент) при  $z=0$ ; в - по поперечному сечению (последний суперэлемент) при  $z=l$



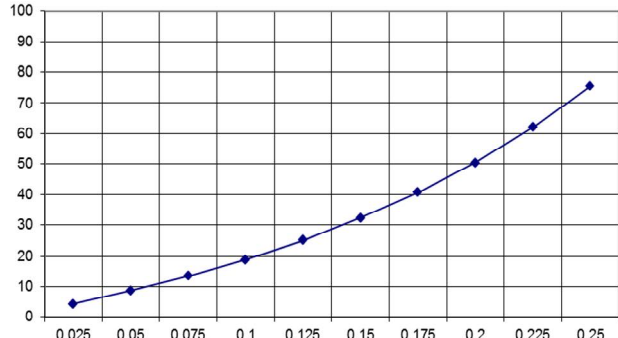
а)

Распределение касательных напряжений при кручении по поперечному сечению (первый суперэлемент)



б)

Распределение касательных напряжений при кручении по поперечному сечению (последний суперэлемент)



в)

Рис. 4. Распределение касательных напряжений в брус: а - по длине (наружный кольцевой элемент); б - по поперечному сечению (первый суперэлемент); в - по поперечному сечению (последний суперэлемент)

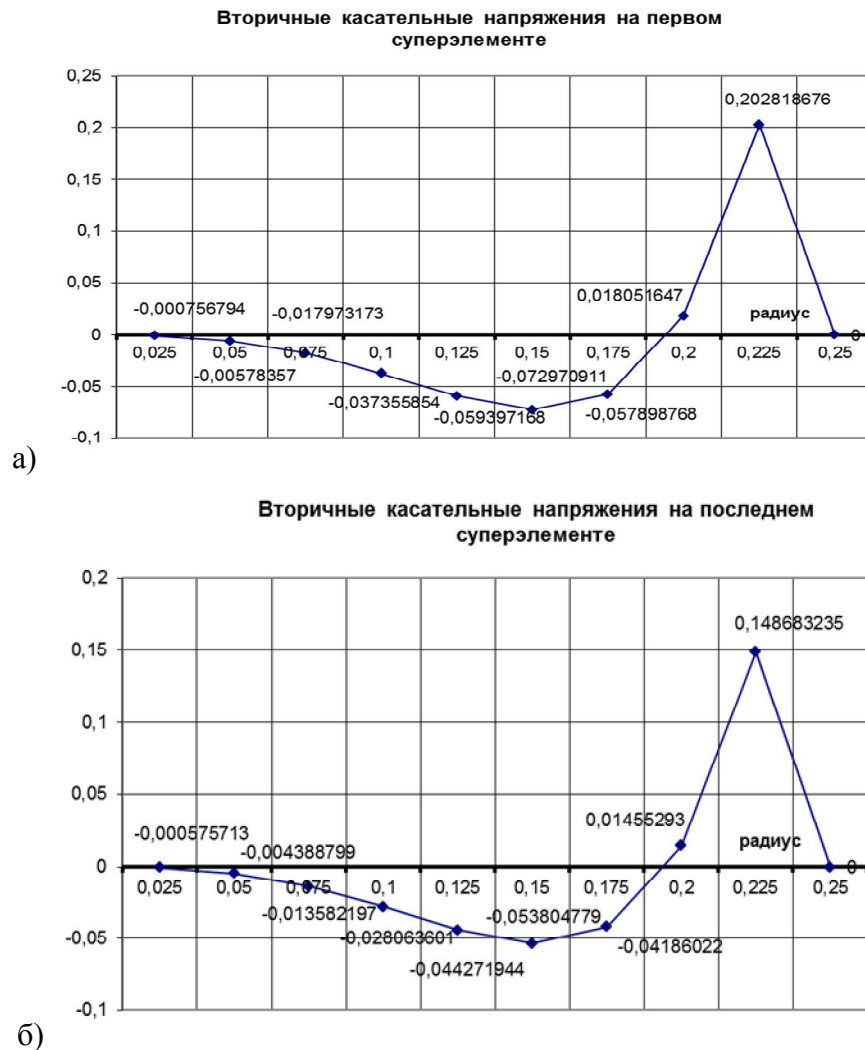


Рис. 5. Вторичные касательные напряжения: а - на первом суперэлементе; б - на последнем суперэлементе

### Список литературы

1. Лурье, К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики / К.А. Лурье. – М.: Наука, 1975.
2. Рейтман, М.И., Шапиро Г.С. Методы оптимального проектирования деформируемых тел / М.И. Рейтман, Г.С. Шапиро. – М.: Наука, 1976. - 258 с.
3. Кашталян, Ю.А. Характеристики упругих материалов при высоких температурах / Ю.А. Кашталян. – Киев: Наукова думка, 1970. – 112 с.
4. Белов, С.В. Пористые металлы в машиностроении / С.В.Белов. – М.: Машиностроение, 1981. - 247с.
5. Кингери, У.Д. Введение в керамику / У.Д. Кингери. – М.: Стройиздат, 1967. – 503 с.
6. Бугарович, Д.О. Расчетное исследование механических свойств пеноалюминия / Д.О. Бугарович, А.А. Смирнов // Мат. Междунар. научно-технич. конф. «Проектирование колес-

ных машин», посв. 70-летию каф. «Колесные машины» МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.

7. Шляхов, С.М. Задача кручения бруса круглого поперечного сечения, выполненного из материала пористой структуры / С.М. Шляхов, Д.Ю. Гаврилов // Сб. научн. тр. «Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред». - Саратов: СГТУ, 2013. - С. 54-58.

8. Шляхов, С.М. О рациональном распределении пористости при кручении бруса круглого поперечного сечения / С.М. Шляхов, Д.Ю. Гаврилов // European Conference on Innovations in Technical and Natural Sciences. The 1st Int. Scientific Conference Proceedings (February 17, 2014), Vienna, OR «East West» Association for Advanced Studies and Higher Education GmbH, pp. 137-142.

9. Гаврилов, Д.Ю. Напряженное состояние бруса прямоугольного сечения, выпол-

ненного из материала пористой структуры при чистом изгибе / Д.Ю. Гаврилов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. - 2017. - № 46. - С. 64-69.

10. Шляхов, С.М. Метод последовательных приближений в задаче рационального распределения пористости при чистом изгибе бруса прямоугольного сечения / С.М. Шляхов, Д.Ю. Гаврилов // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. – 2017. - №1. - С. 46-51.

11. Шляхов, С.М. Об оценке напряженного состояния бруса круглого поперечного сечения пористой структуры при чистом из-

гибе / С.М. Шляхов, Д.Ю. Гаврилов // Научное обозрение. - 2017. - № 7.

#### Об авторах

Шляхов Станислав Михайлович - доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Теория сооружений и строительных конструкций» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А.

Гаврилов Данила Юрьевич - аспирант кафедры «Теория сооружений и строительных конструкций» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А., [gavrilovdy@rambler.ru](mailto:gavrilovdy@rambler.ru).

## TORSION OF THE BAR OF THE ROUND TRANSVERSE SECTION FROM THE VARIABLE ON LENGTH AND THE TRANSVERSE SECTION POROSITY

Shlyakhov S.M., Gavrilov D.Yu.

Saratov State Technical University named after Yuri Gagarin, Saratov, Russian Federation

The present article is devoted to the task of finding of level of the secondary tangent voltages arising in sections because of a variable on porosity length. The decision of such task will allow to consider secondary tangent voltages in case of determination of bearing capacity of a porous bar. Distribution of porosity on a transverse section is set rationally - proceeding from early the solved tasks on selection of porosity in case of torsion of a bar of a round transverse section, on bar length – under the linear law. A research objective is to determine the level of secondary tangent voltages and to evaluate from value.

**Keywords:** porosity, torsion, circle, rationality, bar, tangent tension, shift module, superelement, secondary tangent tension.

**DOI:** 10.22281/2413-9920-2017-03-02-147-153

#### References

1. Lurie K.A. *Optimalnoe upravlenie v zadachakh matematicheskoy fiziki* [Optimal control in problems of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1975. (in Russian)

2. Reytman M.I., Shapiro G.S. *Metody optimalnogo proektirovaniya deformiruemyykh tel* [Methods of optimal design of deformable bodies]. Moscow, Nauka, 1976. 258 p. (in Russian)

3. Kashtalyan Yu.A. *Kharakteristiki uprugikh materialov pri vysokikh temperaturakh*

[The characteristics of elastic materials at high temperatures]. Kiev, Naukova dumka, 1970. 112 p. (in Russian)

4. Belov S.V. *Poristye metally v mashinostroenii* [Porous metals in mechanical engineering]. Moscow, Mashinostroenie, 1981. 247 p. (in Russian)

5. Kingeri U.D. *Vvedenie v keramiku* [Introduction to ceramics]. Moscow, Sroyizdat, 1967. 503 p. (in Russian)

6. Butarovich D.O., Smirnov A.A. Raschetnoe issledovanie mekhanicheskikh svoystv penoal'yuminiya. *Materialy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Proektirovanie kolesnykh mashin», posvyashchennoy 70-letiyu kafedry «Kolesnye mashiny» MGTU im. N.E. Baumana*. Moscow, MGTU im. N.Eh. Baumana, 2006. (in Russian)

7. Shlyakhov S.M., Gavrilov D.Yu. Zadacha krucheniya brusa kruglogo poperechnogo secheniya, vpolnennogo iz materiala poristoy struktury. *Sbornik nauchnykh trudov «Problemy prochnosti elementov konstruksiy pod deistviem nagruzok i rabochikh sred»*. Saratov, SGTU, 2013, pp. 54-58. (in Russian)

8. Shlyakhov S.M., Gavrilov D.Yu. O racionalnom raspredelenii poristosti pri kruchenii brusa kruglogo poperechnogo secheniya. *European Conf. on Innovations in Technical and Natural Sciences. The 1st Int. Scientific Conf. Proc., February 17, 2014*. Vienna, OR «East West» Association for Advanced Studies and Higher Education GmbH, pp. 137-142. (in Russian)

9. Gavrilov D.Yu. Napryazhennoe sostoyanie brusa pryamougolnogo secheniya, vpolnennogo iz materiala poristoy struktury pri chis-

tom izgibe. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2017, No. 46, pp. 64-69. (in Russian)

10. Shlyakhov S.M., Gavrilov D.Yu. Metod posledovatelnykh priblizheniy v zadache ratsionalnogo raspredeleniya poristosti pri chistom izgibe brusa pryamougolnogo secheniya. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2017, No.1, pp. 46-51. (in Russian)

11. Shlyakhov S.M., Gavrilov D.Yu. Ob otsenke napryazhennogo sostoyaniya brusa kruglogo poperechnogo secheniya poristoy struktury pri chistom izgibe. *Nauchnoe obozrenie*, 2017, No. 7. (in Russian)

#### Authors' information

Stanislav M. Shlyakhov - doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at Saratov State Technical University named after Yuri Gagarin.

Danila Yu. Gavrilov – graduate student at Saratov State Technical University named after Yuri Gagarin, [gavrilovdy@rambler.ru](mailto:gavrilovdy@rambler.ru).

Дата публикации  
(Date of publication):  
25.06.2017

