УДК 539.3

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ РАЦИОНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОРИСТОСТИ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ БРУСА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Шляхов С.М., Гаврилов Д.Ю.

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов, Россия

Статья посвящена задаче рационального распределения пористости по сечению бруса при чистом изгибе. Решение такой задачи позволит обеспечить необходимую несущую способность при снижении материалоемкости конструкции. Целью исследования является подобрать рациональный закон распределения пористости по прямоугольному сечению бруса при технических ограничениях производства.

Ключевые слова: *пористость, чистый изгиб, прямоугольник, рациональность, брус, нормальные напряжения, модуль Юнга.*

DOI: 10.22281/2413-9920-2017-03-01-46-51

Рассмотрим чистый изгиб бруса, выполненного из материала (стали) пористой структуры с переменной по сечению пористостью. Интерес к рассмотрению задачи с постановкой именно такого вопроса обуславливается предположением о теоретической возможности варьирования механических свойств нагружаемой конструкции исходя из возникающих в сечениях напряжений. Известно, что механические характеристики материала (модуль Юнга E и предел текучести σ_T) являются функциями пористости материала [1, 2]. Практические результаты показывают, что при повышении уровня пористости р значение модуля Юнга E снижается, а при снижении уровня пористости – повышается. Аналогичная зависимость просматривается и при анализе пары - предел текучести σ_T - пористость p.

Ограничимся случаем упругого деформирования, полагая, что максимальные напряжения в брусе $\sigma_{\max}$ не превышают предела текучести материала σ_T. На основе экспериментальных данных для пористой стали, приведенных в табл. 1, зависимости $E(p)$ и $\sigma_T(p)$ могут быть представлены полиномом.

Таблица 1

Экспериментальные зависимости значений нормальных напряжений и модуля Юнга от пористости

Пористость	σ_T, МПа	Пористость	E, МПа
0	200	0	210000
0,12	116	0,1	160000
0,21	95	0,2	110000
0,31	59	0,3	80000
0,37	43	0,4	50000
0,43	32	0,5	20000

Сглаживая заданную функцию методом наименьших квадратов (МНК) получим полиномы:

$$E = a_1 + a_2 p + a_3 p^2, \tag{1}$$

$$\sigma_T = b_1 + b_2 p + b_3 p^2. \tag{2}$$

Конечным результатом МНК будут являться значения соответствия σ_T, E пористости в границах от 0 до 0,4.

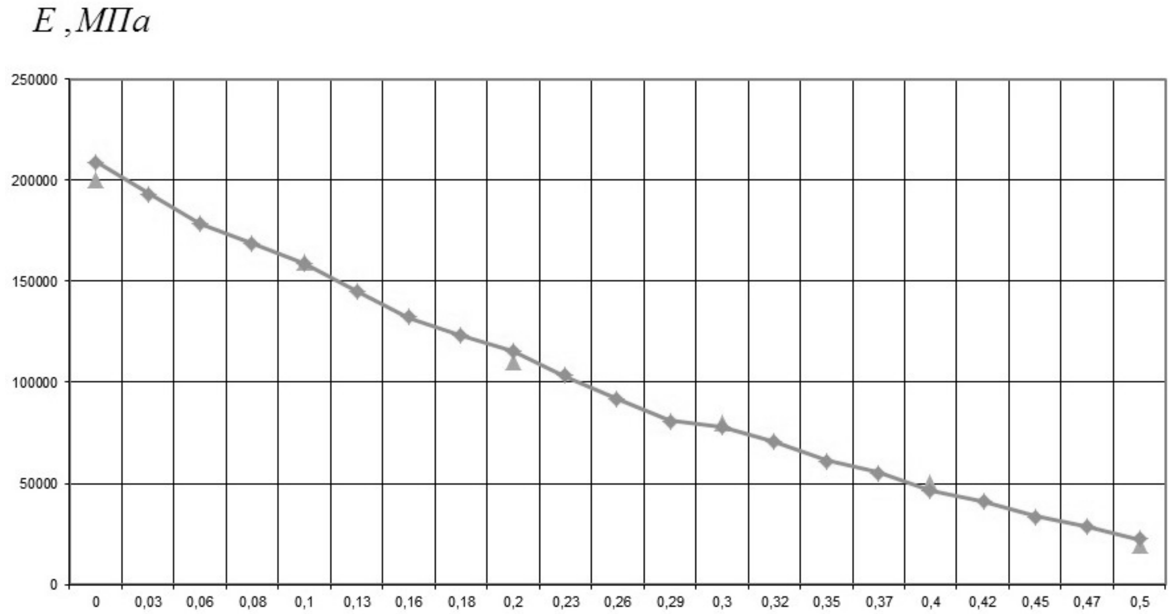
На рис.1, а,б приведены графики функций (1) и (2) соответственно, при значениях коэффициентов (МПа), приведенных в табл.2 в интервале $0 \le p \le 0{,}4$.

Таблица 2

Значения коэффициентов полиномов, полученных методом наименьших квадратов

Коэффициент	Значение коэффициента	Коэффициент	Значение коэффициента
a_1	209285,7143	b_1	196,0368975
a_2	-535000	b_2	-645,9644653
a_3	321428,5714	b_3	627,5555095

а)



б)

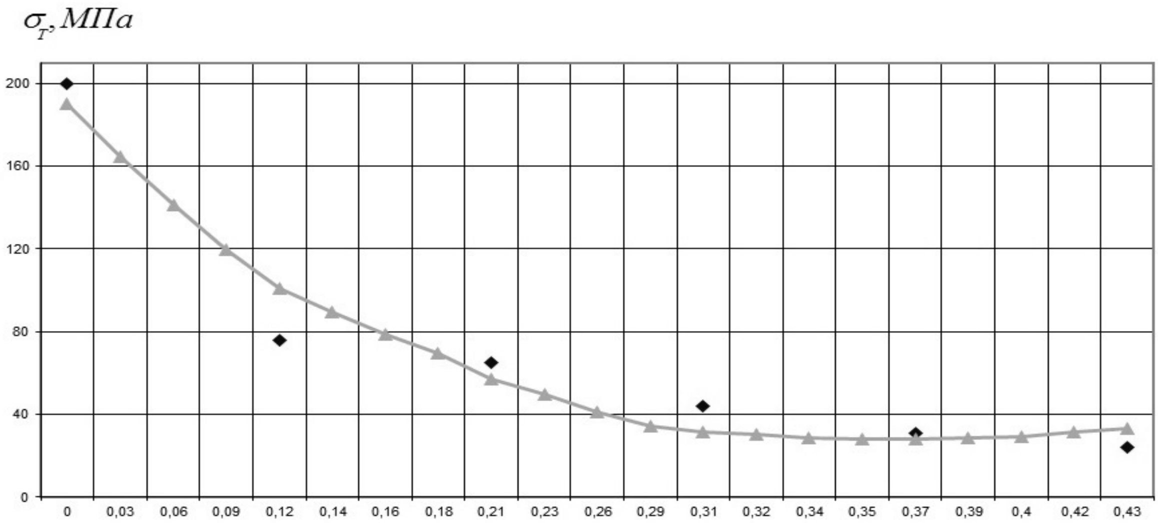


Рис.1. Графики зависимости значений модуля Юнга и нормальных напряжений от пористости: а – E; б - σ_T

Положим теперь, что пористость p переменна по высоте бруса.

$$P = P(y), 0 \le y \le h/2$$

Тогда $E = E(y)$ т.е. модуль Юнга есть функция координаты y (рис.2).

Задача изгиба, таким образом, сводится к изгибу бруса, выполненного из неоднородного материла с переменной по сечению упругой характеристикой $E = E(y)$ и переменным пределом текучести $\sigma_T = \sigma_T(y)$.

Обозначим изгибающий момент на брусе через M, а высоту сечения – h. При чистом изгибе бруса работает гипотеза плоских сечений, т.е. сечения после деформаций остаются плоскими и нормальными к оси бруса.

Соответственно закону Гука при изгибе определим закон изменения напряжений по высоте сечения:

$$\sigma = E\varepsilon \,. \tag{3}$$

Величина максимальных деформаций ε постоянна для данного сечения, а значение $E = E(y_i)$ зависит от расстояния от оси сечения y_j. При этом имеем ограничение

$$\sigma \le \sigma_T(y)\,. \tag{4}$$

Величина изгибающего момента в сечении определится по формуле

$$M \approx 2\cdot\sum_{j=1}^{n}\sigma_j b_j \delta y_j = 2\sum_{j=1}^{n} E_j \varepsilon_j b_j \delta y_j \tag{5}$$

Целью исследования является подобрать такой закон распределения модуля Юнга E и, следовательно, пористости p по сечению бруса, чтобы получить максимально возможный изгибающий момент при ограничениях на напряжение $\sigma \le \sigma_T$ и на пористость

$$p_{\min} \le p \le p_{\max}\,, \tag{6}$$

задаваемых техническими возможностями производства.

Данная постановка является сложной задачей линейного программирования, для решения которой используем приближенный подход. Суть приближенного решения заключается в следующем.

Разбиваем все сечение бруса по высоте сечения на n элементов с наружными высотами y_j (j = 1, 2, …, n) с шагом

$$\delta = \frac{h}{2n},$$

где h – высота бруса (рис.2).

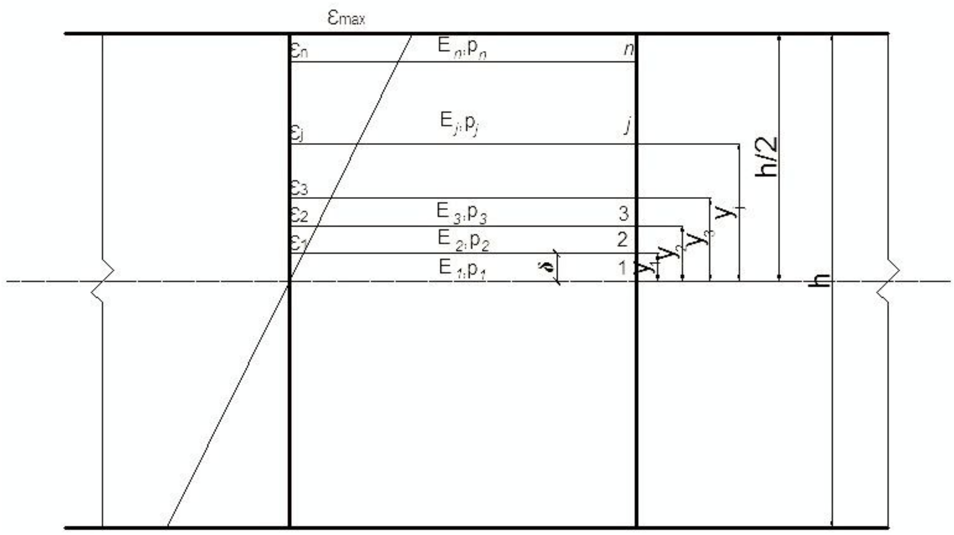


Рис.2. Схема разбиения поперечного сечения на элементы

Соответственно получим

$$y_1 = \Delta h\,; \qquad y_j = y_{j-1} + \delta\,, \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Максимальные напряжения в слоях будут равны

$$\sigma_j = E_j \varepsilon_j \le \sigma_{Tj}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Для решения задачи применим метод последовательных приближений.

Зададимся вначале нулевой пористостью и максимальной деформацией $\varepsilon_{\max}$. По формуле (7) найдем значение нормальных напряжений для каждого элемента поперечного сечения. По диаграмме (рис.1, б) находим предельное значение пористости, соответствующее полученному значению нормальных напряжений, полагая $\sigma_j = \sigma_T$. Найденное значение пористости следует согласовать с условием (6). Примем в нашем случае $p_{\min} = 0$, $p_{\max} = 0{,}4$, т.е. в случае выхода искомого значения p за пределы наложенных ограничений следует принять граничное его значение.

Определяем величину изгибающего момента по формуле

$$M = 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \sigma_j h_j b_j y_j \,. \tag{8}$$

По полученному значению пористости на каждом слое сечения по формуле (1) найдем $E = E_j$ и повторяем расчет.

Будем циклично продолжать описанные выше действия до тех пор, пока не выполнится условие

$$\left| \frac{M_{i+1} - M_i}{M_{i+1}} \right| \cdot 100\% < 1\% .$$

В качестве примера примем h = 20 см, n = 20, $\varepsilon_{\max} = 0{,}000952381$, b = 10 см. Получим значение пористости для каждого элементарного слоя и определяем момент.

Результаты всех приближений сведем в табл.3.

Таблица 3

Сводные значения вычисленных значений изгибающих моментов на каждом приближении

№ приближения	Значение изгибающего момента, кНм	Значение $\left\| \frac{M_{i+1} - M_i}{M_{i+1}} \right\| \cdot 100,\%$
	5,7205	
1	4,6802	18,19
2	4.1285	11,79
3	3,8071	7,79
4	3,5668	6,31
5	3,4283	3,88
6	3,3410	2,54
7	3,2339	3,20
8	3,2201	0,43

При оценке полученных результатов, мы видим, что достигли необходимого результата на 8-м приближении.

Окончательно функции рационального распределения $p(y)$ и $\sigma(y)$ отражены на эпюрах (рис. 3).

Таким образом, описанный метод решения является достаточно точным и объективным методом решения задачи. Варьируя значение $\varepsilon_{\max}$, получим функциональную зависимость $M_{изг}(\varepsilon_{\max}, p)$, из которой найдем расчетное значение $\varepsilon_{\max}$, соответствующее требуемому изгибающему моменту.

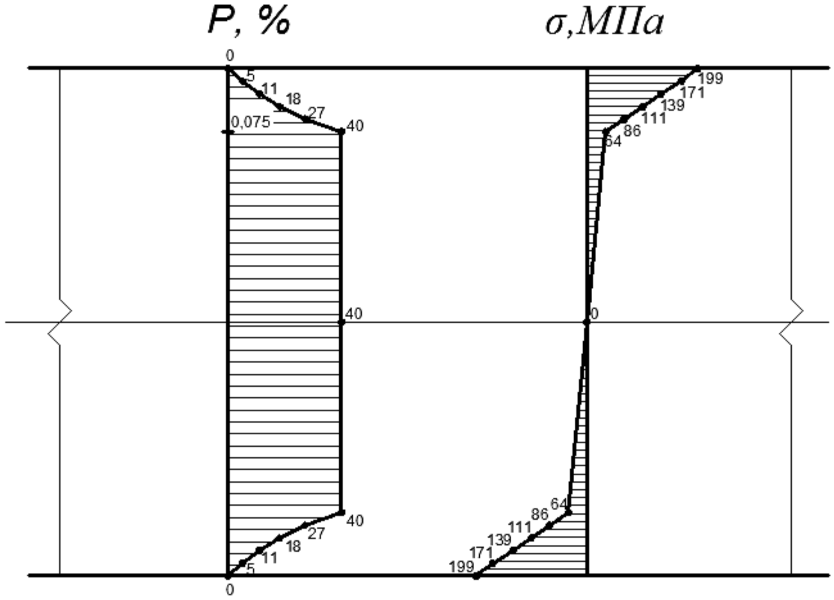


Рис. 3. Эпюры распределения пористости и соответствующих значений нормальных напряжений по поперечному сечению бруса

Список литературы

1. Кашталян, Ю.А. Характеристики упругих материалов при высоких температурах / Ю.А. Кашталян. – Киев: Наукова думка, 1970. – 112 с.

2. Белов, С.В. Пористые металлы в машиностроении / С.В. Белов. – М: Машиностроение, 1981. – 247 с.

Об авторах

Шляхов Станислав Михайлович - доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Теория сооружений и строительных конструкций» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А.

Гаврилов Данила Юрьевич - аспирант кафедры «Теория сооружений и строительных конструкций» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А., *gavrilovdy@rambler.ru*.

METHOD OF CONSECUTIVE APPROXIMATIONS IN THE PROBLEM OF RATIONAL DISTRIBUTION OF POROSITY AT THE PURE BEND OF THE BAR OF RECTANGULAR SECTION

Shlyakhov S.M., Gavrilov D.Yu.

Saratov State Technical University named after Yuri Gagarin, Saratov, Russian Federation

This article is devoted to a task of rational distribution of porosity on bar section in case of a net bend. The solution of such task will allow to provide the necessary bearing capability in case of decrease in a material capacity of a design. A research purpose is to pick up the rational distribution law of porosity for the rectangular section of a bar in case of technical restrictions of production.

Keywords: *porosity, net bend, rectangle, rationality, bar, normal tension, Jung's module.*

DOI: 10.22281/2413-9920-2017-03-01-46-51

References

1. Kashtalyan Yu.A. *Kharakteristiki uprugikh materialov pri vysokikh temperaturakh* [The characteristics of elastic materials at high temperatures]. Kiev, Naukova dumka, 1970. 112 p.

2. Belov S.V. *Poristye metally v mashinostroenii* [Porous metals in mechanical engineering]. Moscow, Mashinostroenie, 1981. 247 p.

Authors' information

Stanislav M. Shlyakhov - doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at Saratov State Technical University named after Yuri Gagarin.

Danila Yu. Gavrilov – graduate student at Saratov State Technical University named after Yuri Gagarin, *gavrilovdy@rambler.ru*.

Дата публикации
(Date of publication):
25.03.2017